LA DIVISIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES

por
Ardalio Tormarancio
En el marco del centenario del matemático mexicano, doctor Roberto Vázquez García (1915,1994)

A la profesora Carmelita Garduño que, siguiendo los libros de Cárdenas y Lluis, nos enseñaba matemáticas en la Secundaria 68.

Es muy frecuente entre los docentes a cargo de la asignatura de matemáticas a nivel medio y medio superior, preguntarse acerca de si la división y la resta entre números naturales son realmente *operaciones* o si es inadecuado considerar que lo son. A continuación, empleando la noción de *conjunto*, se ofrece de manera breve una respuesta a esta cuestión. Esto puede considerarse un aporte de la *Teoría de las estructuras matemáticas* a la *Enseñanza media*. Hay que añadir que en México fue Roberto Vázquez (profesor de Cárdenas y de Lluis) el único difusor de esta Teoría.

Los números con los que entramos en contacto por vez primera a lo largo de nuestras vidas son aquellos a los que los matemáticos dan el nombre de *naturales*

$$1, 2, 3, \ldots$$

Desde la enseñanza primaria aprendemos a “operar” con ellos sumándolos y restándolos, multiplicándolos y dividiéndolos. Sin embargo, hablando estrictamente, sólo la suma y la multiplicación con estos números pueden ser consideradas operaciones, y más precisamente, *operaciones binarias*. En efecto, una **operación binaria** en un conjunto A es una regla de correspondencia que permite asociar un elemento de A, y solamente uno, a cada pareja ordenada de elementos del mismo conjunto A.

Como vemos, en el caso particular en que A es el conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

de los números naturales, la suma y la multiplicación se ajustan perfectamente a esta definición, porque cualquiera que sea una pareja ordenada (m, n) de números naturales, tanto la suma $m + n$ como el producto $m \times n$ vuelven a ser números naturales. En cambio, ni la resta ni la división satisfacen esto en general, ya que podemos mostrar parejas ordenadas de números naturales, como $(5, 7)$, a las que no quede asociado elemento alguno de $\mathbb{N}$ restando ni dividiendo; por ejemplo, ni $5 - 7$ ni $5 \div 7$ son elementos de $\mathbb{N}$.

Tanto bajo la suma como bajo la multiplicación, el conjunto adquiere la estructura algebraica de *semigrupo*. Un **semigrupo** es simplemente un conjunto provisto de una operación binaria para la cual es válida la *ley asociativa*.

Es interesante observar que, pese a que, como ya se dijo, ni la resta ni la división en $\mathbb{N}$ son operaciones binarias, sí dotan, sin embargo, a este conjunto de cierta estructura. Para entender esto con relación a la división es necesario considerar los conceptos que siguen.

[A]. Para cualquier conjunto A, el **cuadrado cartesiano** de A, que se denota como

$A \times A$, es el conjunto de todas las parejas ordenadas de elementos de A. En Símbolos:

$$A \times A = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A \text{ y } a_2 \in A\}$$

[B]. Una **relación binaria** α en un conjunto A es cualquier subconjunto de $A \times A$. Para indicar que una pareja (a_1, a_2) de elementos de A pertenece a la relación binaria α, además de hacerlo escribiendo

$$(a_1, a_2) \in \alpha$$

también se suele escribir

$$a_1 \alpha a_2$$

y se dice que a_1 *se encuentra relacionado con* a_2 *a través de* α. Cuando en el conjunto A está definida una relación binaria α, la pareja

$$(A, \alpha)$$

recibe el nombre de **gráfica dirigida** o de **digráfica**.

[C]. Un **preorden** en un conjunto A es una relación binaria $\preceq$ que satisface las siguientes propiedades:

(•) **reflexiva**; es decir, que para todo $a \in A$ se tiene

$$a \preceq a$$

(• •) **transitiva**; es decir, si para cualesquiera $a_1, a_2, a_3 \in A$ se tiene

$$a_1 \preceq a_2 \quad \text{y} \quad a_2 \preceq a_3$$

de ello se sigue que

$$a_1 \preceq a_3$$

Si $\preceq$ es un preorden en A, se dice que la pareja $(A, \preceq)$ es un **conjunto preordenado** o un **copro**.

Sujetémonos a estas definiciones (y a que sabemos cómo se multiplican los números naturales) para tratar el caso de la división en $\mathbb{N}$.

A fin de continuar con la formalidad que exige el tema, tomemos dos números naturales cualesquiera m y $\tilde{n}$. Se dice que m **divide** a $\tilde{n}$ si existe otro número natural n que al ser multiplicado por m arroja a $\tilde{n}$ como producto; es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $mn = \tilde{n}$. Si m divide a $\tilde{n}$, se dice qe $\tilde{n}$ es un **múltiplo** de m. Para indicar que m divide a $\tilde{n}$ escribiremos

$$m \mid \tilde{n}$$

La divisibilidad en los números naturales define una relación binaria en $\mathbb{N}$; una pareja de números naturales $(m, \tilde{n})$ se halla en esta relación si, y sólo si, $m \mid \tilde{n}$. En vista de esto y de lo definido en [B] tenemos, por de pronto, que $(\mathbb{N}, \mid)$ *es una digráfica*.

Pero aún más, porque es claro que:

(i) para todo número natural n se tiene que

$$n \mid n$$

(ii) si tres números naturales n_1, n_2, n_3 son tales que

$$n_1 \mid n_2 \quad \text{y} \quad n_2 \mid n_3$$

entonces

$$n_1 \mid n_3$$

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, |)$ *es un copro*.

Para ir un poco más lejos observemos lo siguiente: Supongamos que n_1 y n_2 son dos números naturales tales que

$$n_1 \mid n_2 \quad \text{y} \quad n_2 \mid n_1$$

Por la primera relación, existe un número natural m_1 tal que

$$m_1 n_1 = n_2$$

Por la segunda relación existe un número natural m_2 tal que

$$m_2 n_2 = n_1$$

En consecuencia podemos escribir

$$n_1 = m_2 n_2 = m_2(m_1 n_1) = (m_2 m_1) n_1$$

Siendo números naturales todos estos factores, la igualdad que se está dando entre el primero y el último miembro sólo es posible si tenemos

$$m_2 m_1 = 1$$

lo cual a su vez, sólo se da si

$$m_2 = m_1 = 1$$

Consecuentemente, resulta que

$$n_1 = n_2$$

[Ch]. Sea

$$(A, \preceq)$$

un copro arbitrario. Se dice que el preorden $\preceq$ es un **orden parcial** en A si tiene la **propiedad de antisimetría**, es decir, si para cualesquiera elementos a_1 y a_2 de A, del hecho de que sea

$$a_1 \preceq a_2 \quad \text{y} \quad a_2 \preceq a_1$$

se sigue que

$$a_1 = a_2$$

En tal caso se dice que la pareja $(A, \preceq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado** o un **copo**.

Como corolario de la observación anterior resulta que $(\mathbb{N}, |)$ *es un copo*.

[D]. Sean, $(A, \preceq)$ un copo y U un subconjunto de A, arbitrarios. Entonces:

(a) Un elemento x de A es una **cota superior** para U en $(A, \preceq)$ si para todo elemento u de U se tiene que

$$u \preceq x$$

(b) Un elemento y de A es una **cota inferior** para U en $(A, \preceq)$ si para todo elemento u de U se tiene que

$$y \preceq u$$

(c) Una cota superior x para U en $(A, \preceq)$ es un **supremo** de U en $(A, \preceq)$ si para toda cota superior z para U en $(A, \preceq)$, se tiene que

$$x \preceq z$$

(d) Una cota inferior y para U en $(A,\preceq)$ es un **ínfimo** de U en $(A,\preceq)$ si para toda cota inferior w para U en $(A,\preceq)$, se tiene que

$$w \preceq y$$

Obsérvese que, debido a la propiedad de antisimetría, cuando en un copo $(A,\preceq)$ un subconjunto U de A tiene un supremo x, entonces x

es el único supremo que tiene U en $(A,\preceq)$. Y análogamente tratándose del ínfimo.

Un copo $(A,\preceq)$ en el que cualquier subconjunto con dos elementos posee tanto ínfimo como supremo se llama **retícula**. Si $(A,\preceq)$ es una retícula y a_1 y a_2 son dos elementos cualesquiera de A, designaremos al ínfimo de $\{a_1,a_2\}$ en $(A,\preceq)$ mediante

$$a_1 \wedge a_2$$

y al supremo de $\{a_1,a_2\}$ en $(A,\preceq)$ mediante

$$a_1 \vee a_2$$

Desde luego, a lo que se pretende llegar con todo esto es a que $(\mathbb{N}, |)$ es una retícula. Para probarlo tenemos que mostrar que bajo la divisibilidad, cualquier par de números naturales posee tanto ínfimo como supremo.

Veamos que proponiendo, para cualesquiera dos números naturales n_1 y n_2 a $n_1 \vee n_2$ como el *mínimo común múltiplo* de n_1 y n_2, mismo que denotaremos como $[n_1,n_2]$, y a $n_1 \wedge n_2$ como el *máximo común divisor* de n_1 y n_2, al cual denotaremos por (n_1,n_2), queda satisfecha la definición de retícula.

En efecto:

(a) $[n_1,n_2]$ es cota superior de $\{n_1,n_2\}$ en $(\mathbb{N}, |)$ porque

$$n_1 \mid [n_1,n_2] \quad \text{y} \quad n_2 \mid [n_1,n_2]$$

(b) Además, si $m \in \mathbb{N}$ también es cota superior de $\{n_1,n_2\}$ en $(\mathbb{N}, |)$, quiere decir que

$$n_1 \mid m \quad \text{y} \quad n_2 \mid m$$

lo que significa que m es un múltiplo común de n_1 y n_2; pero entonces

$$[n_1,n_2] \mid m$$

porque el mínimo común múltiplo $[n_1,n_2]$ tiene la propiedad de dividir a cualquier otro múltiplo común de n_1 y n_2.

(c) (n_1,n_2) es cota inferior de $\{n_1,n_2\}$ en $(\mathbb{N}, |)$ porque

$$(n_1,n_2) \mid n_1 \quad \text{y} \quad (n_1,n_2) \mid n_2$$

(d) Además, si $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ también es cota inferior de $\{n_1,n_2\}$ en $(\mathbb{N}, |)$, quiere decir que

$$\tilde{n} \mid n_1 \quad \text{y} \quad \tilde{n} \mid n_2$$

lo que significa que $\tilde{n}$ es un divisor común de n_1 y n_2; pero entonces

$$\tilde{n} \mid (n_1,n_2)$$

porque el máximo común divisor (n_1,n_2) tiene la propiedad de ser múltiplo de cualquier otro divisor común de n_1 y n_2.

Haber demostrado que la divisibilidad en $\mathbb{N}$ induce estructuras de orden en este conjunto, puede dar alguna idea de la importancia que tiene la vieja división de los números naturales en la matemática contemporánea. Esclarecer esta idea exige adentrarnos en teorías como la de los conjuntos parcialmente ordenados, la de las retículas o en la Topología.

Por ahora baste decir respecto a ello, que el tratamiento teórico de los copos trae consigo el estudio de las funciones que conservan el orden; son las llamadas *funciones monótonas*. Si $(A,\preceq)$ y $(B,\preccurlyeq)$ son copos, una función

$$f : (A,\preceq) \to (B,\preccurlyeq)$$

es **monótona** si el que elementos a_1, a_2 de A guarden la relación de orden $a_1 \preceq a_2$ implica que sus imágenes en B bajo f guardan la relación $f(a_1) \preccurlyeq f(a_2)$. En otras palabras, f es **monótona** si para cualesquiera $a_1, a_2 \in A$ vale la implicación siguiente:

$$(a_1 \preceq a_2) \Rightarrow (f(a_1) \preccurlyeq f(a_2))$$

De igual modo, el desarrollo de la teoría de retículas va aparejado con el estudio de las funciones que conservan ínfimos y supremos de cada conjunto con dos elementos; son llamadas *homomorfismos reticulares*. Para definirlos se hace necesario, dadas dos retículas $(A,\preceq)$ y $(B,\preccurlyeq)$, distinguir los signos $\wedge$ y $\vee$ con subíndices, escribiendo $\wedge_\preceq$ y $\vee_\preceq$ para designar ínfimos y supremos en $(A,\preceq)$, y $\wedge_\preccurlyeq$ y $\vee_\preccurlyeq$ para designar a los de $(B,\preccurlyeq)$. Entonces, una función

$$f : (A,\preceq) \to (B,\preccurlyeq)$$

es un **homomorfismo reticular** si para cualquier subconjunto de A del tipo $\{a_1, a_2\}$ se cumplen las igualdades siguientes:

$$f(a_1 \wedge_\preceq a_2) = f(a_1) \wedge_\preccurlyeq f(a_2) \quad \text{y} \quad f(a_1 \vee_\preceq a_2) = f(a_1) \vee_\preccurlyeq f(a_2)$$

Es fácil ver que un homomorfismo reticular es una función monótona entre los copos correspondientes. Lo recíproco, en cambio, es falso; para probarlo hay que mostrar una función monótona entre dos retículas que no resulte ser un homomorfismo reticular. Y aquí hace oportuna aparición nuestra retícula $(\mathbb{N}, \mid)$.

Resulta que también, bajo su orden usual $\leq$, $\mathbb{N}$ adquiere estructura reticular; basta definir, para cualesquiera números naturales n_1 y n_2:

$$n_1 \vee n_2 = \max\{n_1, n_2\} \quad \text{y} \quad n_1 \wedge n_2 = \min\{n_1, n_2\}$$

Por otra parte, la función identidad

$$\begin{aligned} 1 : \ \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

es monótona si se piensa definida entre los copos:

$$1 : (\mathbb{N}, \mid) \to (\mathbb{N}, \leq)$$

ya que si n_1 y n_2 son tales que

$$n_1 \mid n_2$$

es claro entonces que

$$n_1 \leq n_2$$

y como

$$1(n_1) = n_1 \quad \text{y} \quad 1(n_2) = n_2$$

resulta entonces

$$1(n_1) \leq 1(n_2)$$

Sin embargo,

$$1 : (\mathbb{N}, |\,) \to (\mathbb{N}, \leq)$$

no es un homomorfismo reticular ya que no conserva ínfimos, como lo muestra el siguiente ejemplo:

$$1(2 \wedge_{|} 3) = 2 \wedge_{|} 3 = (2,3) = 1 \neq 2 = \min\{2,3\} = 2 \wedge_{\leq} 3 = 1(2) \wedge_{\leq} 1(3)$$