VALOR DE RESCATE
Y
RESERVA MATEMÁTICA
DEL SEGURO DE VIDA INDIVIDUAL
EN MÉXICO

Oscar Aranda M

Nadia Araceli Castillo García

5 Diciembre 2010

El presente trabajo tiene como objetivo el proponer el modelo matemático para la obtención del valor de rescate previsto en los artículos 182 y 184 de la Ley Sobre el Contrato del Seguro, basado en la suficiencia de la reserva matemática, independientemente del esquema de comisiones definidas en la nota técnica para la determinación de su prima de tarifa del seguro de vida y condicionado a su temporalidad mayor o igual a 10 años.

Para tal efecto se realizará el análisis conceptual que dio origen a las expresiones definidas para la determinación de la reserva matemática modificada mínima del sistema mexicano, propuesto en el diario oficial de la federación en septiembre de 2003 y complementar bajo esta propuesta el modelo de suficiencia de reserva al para incorporar el concepto de valor de rescate, en este punto, no se pretende transcribir las expresiones actuariales del documento citado, si no por el contrario, se pretende documentar el modelo y presentar bajo una forma más concisa el concepto de reserva mínima basado en su análisis racional propuesto en su momento por el matemático August Zillmer en 1863.

Una vez definido lo anterior, conceptualizar el riesgo como una variable aleatoria asociada al tiempo y bajo la técnica de la teoría del riesgo, definir la suficiencia la cartera bajo la aproximación de la distribución normal, proponiendo así el modelo general de valor de rescate basado en el margen de seguridad que resulta del proceso.

Finalmente mostrar una alternativa sistemática que resulta del modelo de reserva matemática mínima aplicable exclusivamente para los seguros de vida bajo esquemas de comisiones decrecientes, proceso que no necesita definir la suficiencia de la reserva y sólo se basa en el recargo que por margen de seguridad se defina en la nota técnica. En ambos métodos se presupone que los recargos adicionales al margen de seguridad son de tipo nivelado, aún cuando el modelo presentado da la posibilidad de aplicar en un caso más general.

Desde los orígenes del seguro, la entidad administradora del riesgo o compañía de seguros, ha jugado un papel importante desde el punto de vista social y económico, ya que el ser humano por naturaleza es eminentemente social, de ahí que siempre se ha reunido con sus semejantes con el objeto de formar grupos, comunidades y sociedades; y con ello poder satisfacer sus necesidades, una de estas necesidades la constituye el prever sobre riesgos que en forma futura, podrían menoscabar su situación económica o incluso el valor total que representa la pérdida del mismo, en esta virtud, se pude decir que existe una incertidumbre derivada de la falta de información del cómo constituir o cuantificar el valor del riesgo, donde el riesgo es la contingencia o proximidad al daño y esta contingencia puede o no suceder a corto plazo, por lo tanto, consciente o inconscientemente todos nuestros actos son una sucesión de riesgos y el conocimiento permite reducir los efectos del mismo o en cuyo caso adoptar mejores medidas para enfrentarlo; este tipo de riesgos pueden ser sobre la propia existencia o incluyo sobre bienes materiales.

En esta virtud, hoy en día la valoración de la incertidumbre puede por lo tanto, ser representada por medidas cuantitativas que reflejan un valor esperado, determinado mediante modelos matemáticos en la que se incluyen disciplinas correlativas como la probabilidad, estadística, finanzas y economía entre otras, con independencia de que en determinados momentos puedan surgir situaciones catastróficas esencialmente anormales o puedan transcurrir períodos de tiempo con beneficio innegable para quienes ejercen el seguro, lo normal es que los siniestros tengan una frecuencia y una intensidad relativamente uniformes y se manifiesten con periodicidad constante en un determinado lapso de tiempo, afectando por igual a un determinado número de personas u objetos asegurados.

Sobre estos principios, se puede hacer el estudio estadístico de la probabilidad media del siniestro y fijar el precio de tal probabilidad, a la que se le denomina ***prima de riesgo***, para ello, se referirá su cuantificación por la ***frecuencia y severidad***, es decir, la probabilidad de ocurrencia y el valor que representa el materializarse el riesgo, respectivamente.

En el caso del seguro de vida, la determinación de la prima corresponde al valor esperado de la indemnización en el tiempo, en forma general la indemnización corresponde al valor presente de dicho pago, asociado a su función de probabilidad que en forma general involucra una tasa interés de inversión del recurso a indemnizar, dicho concepto se le denomina ***prima neta única (PNU)*** del seguro, definamos ésta como:

$$PNU = E\left[Z\right] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}\ v^{k+1} g_{K(x)}\left(k\right) \\ \int_{0}^{\infty} b_t\ v^t\ f_{T(x)}\left(t\right)\ dt \end{cases} \tag{1}$$

Donde en la primera expresión, se prevé el pago de la indemnización b_{k+1} por fallecimiento del individuo de edad *x* al final del año póliza $\left(k+1\right)$, es decir, corresponde a un modelo discreto, en tanto que en la segunda expresión b_t, corresponde a la indemnización que se efectuará al instante $\left(t\right)$ del fallecimiento del individuo de edad *x*, es decir, corresponde a un modelo de tipo continuo.

En esta virtud, el valor esperado de la indemnización, simbolizado como Z, constituye la variable aleatoria de dicho pago en el tiempo y tomará el valor

$$Z = \begin{cases} b_{K+1}\ v^{K+1} & \forall\ \ K = 0,1,2,.. \\ b_T\ v^T & \forall\ \ T \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

para el caso discreto y continuo, respectivamente.

En forma particular, v^{K+1} y v^{T}, indican el valor presente de la variable aleatoria de la indemnización en el tiempo, ya sea al final del año en que se paga el siniestro (fallecimiento) ocurrido dentro del año póliza o en forma inmediata, respectivamente, por lo tanto el término T es una variable aleatoria de tiempo, asociado al valor presente del pago inmediato, es decir, representa el tiempo futuro para una persona de edad *x* antes de ocurrir su muerte - *de aquí en adelante simbolizada por (x)* - y K es la variable aleatoria de años completados o "vividos" por (*x*) antes de ocurrir su muerte, es decir $K=\lfloor T \rfloor$, dichos pagos estarán asociados a su función de probabilidad $g_{K(x)}(k)$ y $f_{T(x)}(t)$, para el caso discreto y continuo, respectivamente, en particular.

$$\begin{aligned} g_{K(x)}(k) &= {}_{k|}q_x \qquad \forall\ k=0,1,2,... \\ f_{T(x)}(t) &= {}_t p_x\ \mu_x(t) \quad \forall\ t \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(c)

Se sabe que la fuerza de mortalidad bajo la teoría del envejecimiento uniforme (*Makeham-Gomper´z*) es el factor predominante para describir que el riesgo por fallecimiento que asume una compañía de seguros es creciente con el tiempo, en esta virtud, el pretender establecer un proceso donde exista una equidad entre el riesgo asumido por la compañía de seguros y la prima comprometida a cubrir por un solicitante del seguro en el tiempo, origina definir generalmente una ***prima neta nivelada (P)*** a la fecha de celebración del contrato, la cual se obtiene al amortizar actuarialmente la ***PNU*** del seguro con periodo máximo al definido como vigencia del riesgo asumido, es decir, la ***P*** estará condicionada a la existencia o sobrevivencia del individuo asegurado.

Para fines prácticos, en una compañía de seguros se prevé el pago de la indemnización al instante del fallecimiento del individuo (*x*), en tanto que la ***P*** a cargo del asegurado antes de *recargos*, se prevé en forma anual y anticipada, es decir, al inicio de cada año o fecha de aniversario del seguro pactado; la siguiente ecuación de valor, representa este proceso.

$$E[Z] = P \cdot E[Y] \tag{4}$$

Donde el valor esperado de la indemnización versus la prima antes de recargos, comprometida a cubrir por (*x*) y asociada al valor esperado del pago en el tiempo, permite determinar el valor del pago de ***P***, que espera la compañía de seguros recibir por parte del asegurado, en particular $Y=\ddot{a}_{\overline{K+1|}}$, y representa una variable aleatoria del conjunto de pagos asociados a la función de probabilidad $g_{K(x)}(k), \forall\ K=0,1,2,...$; por lo tanto, la prima neta nivelada resultante es $P=\dfrac{E[Z]}{E[Y]}$, que vista desde el punto de vista comercial, generalmente es anual, para después incorporar recargos por administración, adquisición y margen de seguridad sobre el seguro, a este proceso se le denomina ***prima de tarifa*** o ***de cobro (*** π ***);*** estos recargos pueden estar definidos como porcentaje de la π o como recargos al millar de la suma asegurada en riesgo; o la combinación de ellas, su estructura conceptual, al instante en que se pacta el seguro es

$$\pi * E\left[Y\right] = P * E\left[Y\right] + E\left[R_{k+1}^{\%\pi}\pi \ Y\right] + E\left[R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} \cdot SA_{k+1} \ Y\right] \tag{5}$$

donde $R_{k+1}^{0/00 \cdot SA}$, simboliza los recargos al millar sobre la suma asegurada SA_{K+1}, pactada en cada año $(k+1)$ y asociada al valor esperado de la variable aleatoria del conjunto de pagos de primas; es decir, $E\left[R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} \cdot SA_{k+1} \ Y\right]$ y en forma semejante $R_{k+1}^{\%\pi}$, representa los recargo como porcentaje de la prima de tarifa, asociado al valor esperado de la variable aleatoria del conjunto de primas, es decir, $E\left[R_{k+1}^{\%\pi}\pi \ Y\right]$, en general ambas expresiones son variables aleatorias asociadas a su propio tiempo por ingreso de primas, por lo tanto, la ***prima de tarifa***[1] en forma general se integra por componentes de recargo por administración, margen de seguridad y gastos de adquisición; puede existir la posibilidad de que todos ellos sean bajos esquemas de recargos decrecientes en el tiempo, sin embargo en la práctica del seguro de vida los dos primeros conceptos generalmente son constantes y para el último es común observar esquemas de recargos constantes (nivelados) o decreciente en el tiempo.

Bajo el proceso definido en la expresión (5), la ***prima neta nivelada (P)*** del seguro pactado, presentará excedentes al inicio para algunos *k-años* póliza, respecto al costo real del seguro por año$\left(v * q_{x+k}^{a}\right)$, es decir,

$$v * q_{x+k}^{a} < P \tag{6}$$

donde q_{x+k}^{a}, representa la probabilidad ajustada de "salida" definida dentro de un intervalo anual para una persona de edad $(x+k)$, donde esta probabilidad puede considerar efectos de selección (f_{x+k}) sobre la tasa de mortalidad (q_{x+k}) y caducidad (w_{x+k}), actuarialmente $q_{x+k}^{a} = q_{x+k} * f_{x+k} + w_{x+k}$.

En teoría, estos excedentes en los primeros *k-años,* acumulados actuarialmente, financiaran los faltantes futuros a partir de alguna *k*, donde se cumpla que $v * q_{x+k}^{a} \geq P$, más aún, la ecuación de valor $E\left[Z\right] = P * E\left[Y\right]$, definida a edad (*x*), fue formulada con respecto a su propio tiempo de vida *T(x)* ó *K(x)*, por lo que al replantear la ecuación de valor en algún periodo posterior a edad *x*, y considerando la *P* inicialmente pactada, origina una inequidad; consideremos la siguiente expresión para ejemplificar el caso discreto.

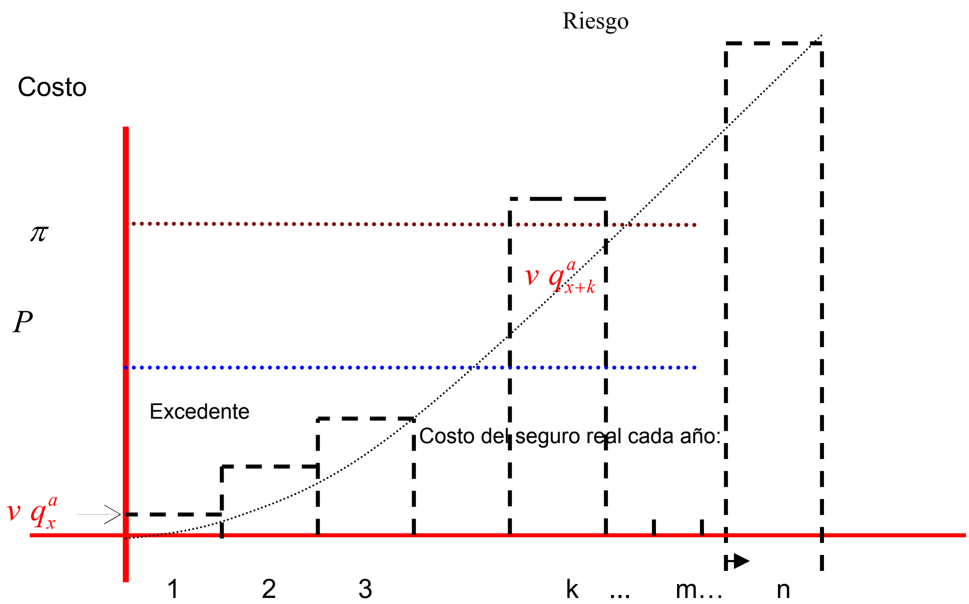
$$E\left[Z\right]_{K(x+1)} \neq P_{K(x)} * E\left[Y\right]_{K(x+1)} \tag{7}$$

(1) Es importante indicar que el modelo de la prima de tarifa, puede ser más sofisticado, si se consideran elementos adicionales al flujo del negocio del seguro, es decir, se puede considerar el proceso de flujo sobre la acumulación de primas e ingresos por inversiones, sujetas a reclamaciones por muerte, beneficios garantizados y otros gastos sobre la base de inversión de los recursos que ingresan, definida por la tasa de interés, las variables de mortalidad y caducidad; todos estos elementos bajo un proceso recurrente, con base a la experiencia del año inmediato anterior.

Esta inequidad se da por el mayor requerimiento en la prima neta nivelada a una edad $(x+k)$, basta recordar que el efecto depende de la función de distribución la cual es siempre creciente, en esta virtud la compañía requerirá mayor recurso año con año,

De la expresión (6), los excedentes de la prima en los primeros k años sirven para constituir un fondo que posteriormente será disminuido cuando el riesgo del seguro del periodo sea mayor a la prima neta nivelada, es decir, $v * q_{x+k}^{a} \geq P$, estos recursos acumulados actuarialmente se le denomina ***Reserva Matemática*** y es exclusivo del seguro de vida.

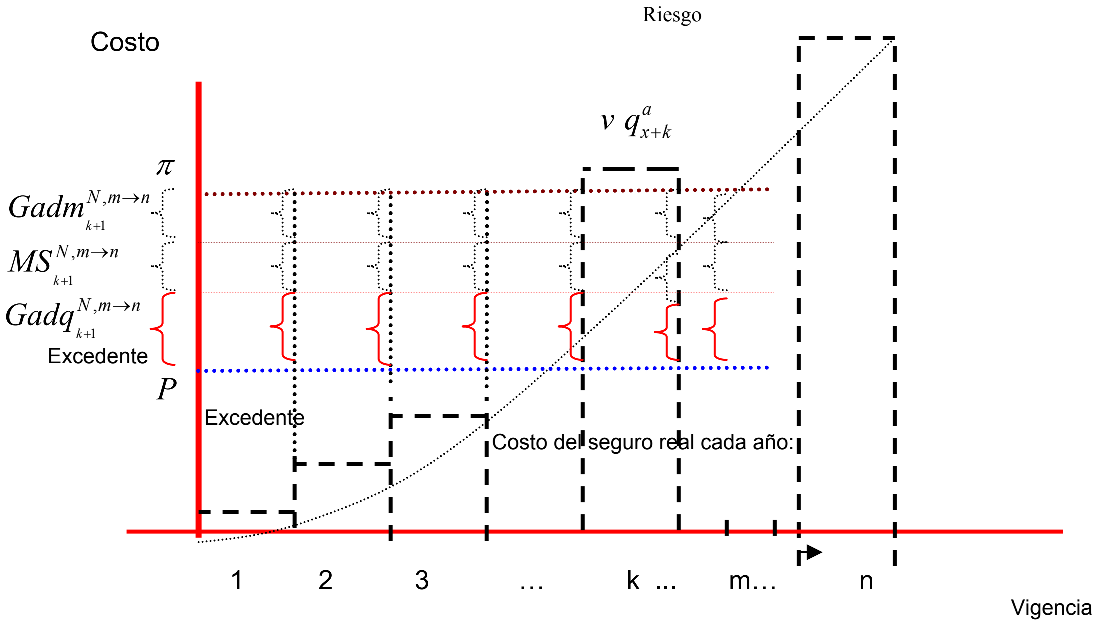
Para fines de análisis y de carácter ilustrativo, consideremos la siguiente gráfica, donde se representa el comportamiento de un seguro totalmente discreto temporal a n-años, con pago de suma asegurada unitaria y con pago de primas limitada a m-años, donde $m \leq n$ y $m, n \in Z^{+}$;



Gráfica 1

Observemos que la tendencia del riesgo $\left(v\, q_{x+k}^{a}\right)$ a cada año $k = 0,1,2,\ldots n-1$, es creciente, en particular el valor presente actuarial del costo del riesgo de cada año póliza a edad (x), es la PNU del seguro pactado y π representa prima de tarifa a cargo del asegurado.

En la gráfica (2) se puede ilustrar el caso de los seguros de vida con pago de prima anual y recargos nivelados, en donde al descontar de la prima tarifa (π) dichos recargos se obtiene precisamente la prima neta nivelada (P) del año.



Gráfica 2

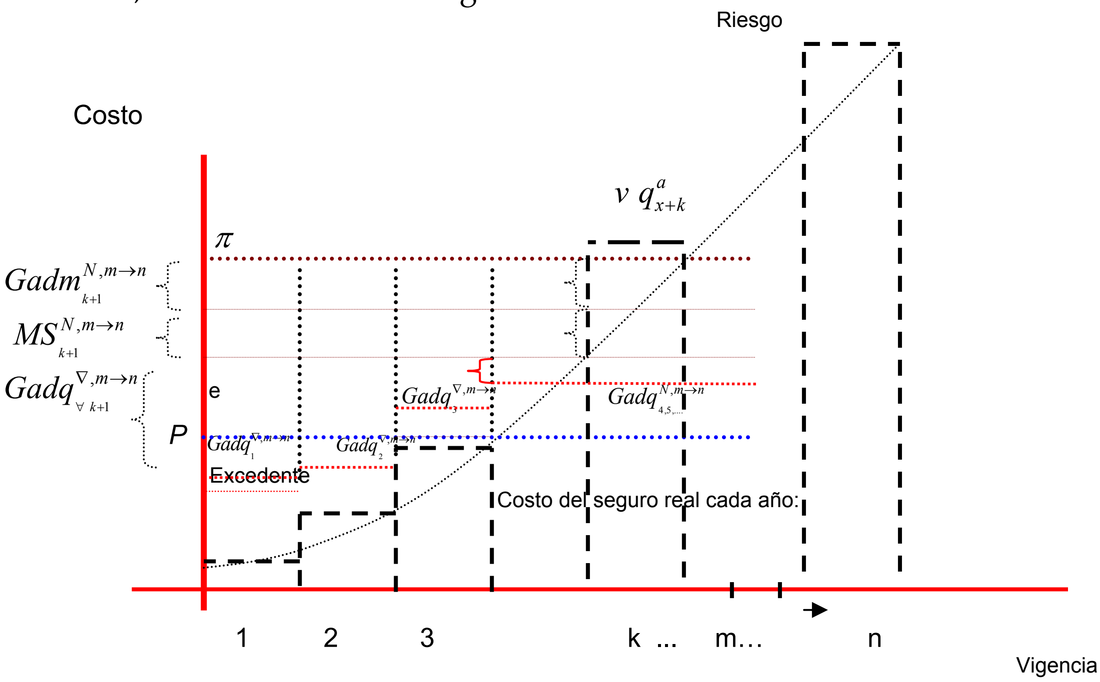
Donde $\left(Gadm^{N,m\to n}_{k+1}\right)$ representa el recargo por administración, $\left(MS^{N,m\to n}_{k+1}\right)$ el margen de seguridad y $\left(Gadq^{N,m\to n}_{k+1}\right)$ el gasto de adquisición, en todo ellos el índice superior denota que son de tipo nivelado (*N*) y limitado a *m*-años, incluso *m* que es el número de pagos que en forma anual y anticipada realiza el asegurado puede ser igual a la duración del seguro$(m \to n)$; y el subíndice (*k*+*1*), define el año de póliza en que se aplica; *k*=0,1,2,…

Para este tipo de esquema, donde los recargos son de tipo nivelado, la ***reserva matemática*** se determina como el valor esperado de la obligación futura que asume la compañía de seguros a la fecha de valuación del año *k* de estudio, menos el valor esperado de las prima netas niveladas por ingresar provenientes de la prima de tarifa a cargo del asegurado, también en el año *k* de estudio, en particular dada la procedencia de *P*, la reserva así obtenida se le conoce como ***Reserva Matemática Pura,*** es decir, *P* no se ve afectada año con año al descontar los recargos definidos sobre la prima de tarifa y la metodología definida para la integración de la reserva se le conoce como ***método prospectivo*** y dicho proceso fue propuesto por primera vez por el actuario inglés ***Francis Bailey*** a principios del siglo XIX[2].

(2) Equivalencias a este método se tiene el llamado método retrospectivo, el cual consiste valuar la reserva matemática de prima nivelada al inicio del año póliza, como la diferencia entre el valor esperado de la obligación asumida por el asegurado en cuanto al ingreso de primas y el valor esperado de la obligación que asume la compañía de seguros; el periodo considerado para este efecto, será entre la fecha de inicio de póliza y la fecha requerida de valuación, diferencia que deberá ser acumulada actuarialmente a esta última, otro método de valuación es el denominado método interactivo o de Fackler, donde el principio básico es considerar un fondo que se incremente por el ingreso de primas e intereses, a la vez que disminuye por el concepto de pagos efectuados por fallecimiento.

Cuando los recargos provienen de un **esquema de tipo decreciente** -*sólo basta que sea uno de ellos, por ejemplo el gasto de adquisición* ($Gadq^{\nabla,m}_{\forall\, k+1}$)- al aplicar el proceso descrito para la gráfica (2), originará tomar parte de la prima neta nivelada en los primeros años del seguro y por consiguiente el concepto de ***reserva matemática*** definido anteriormente producirá **valores negativos** en los primeros años, por lo que será necesario reconsiderar la definición de reserva matemática dada anteriormente.

En particular para los primeros años de vigencia del seguro $\underset{k+1}{P^{\nabla}} < P_{k+1} \quad \forall\ k = 0,1,2$, donde $\underset{k+1}{P^{\nabla}}\pi_{k+1} = \left[1-\left(Gadm^{N,m\to n}_{k+1} + Gadq^{\nabla,m\to n}_{\forall\, k+1} + MS^{N,m\to n}_{k+1}\right)\right]$, se usará el símbolo ($\nabla$) en la notación, para definir que los gastos de adquisición corresponden a valores decrecientes en el tiempo, generalmente dentro de los tres primeros años, para luego ser constante pero menor al gasto de adquisición nivelado que se obtiene mediante la expresión (16) que más adelante se desarrollará; en este caso en forma gráfica se tiene.

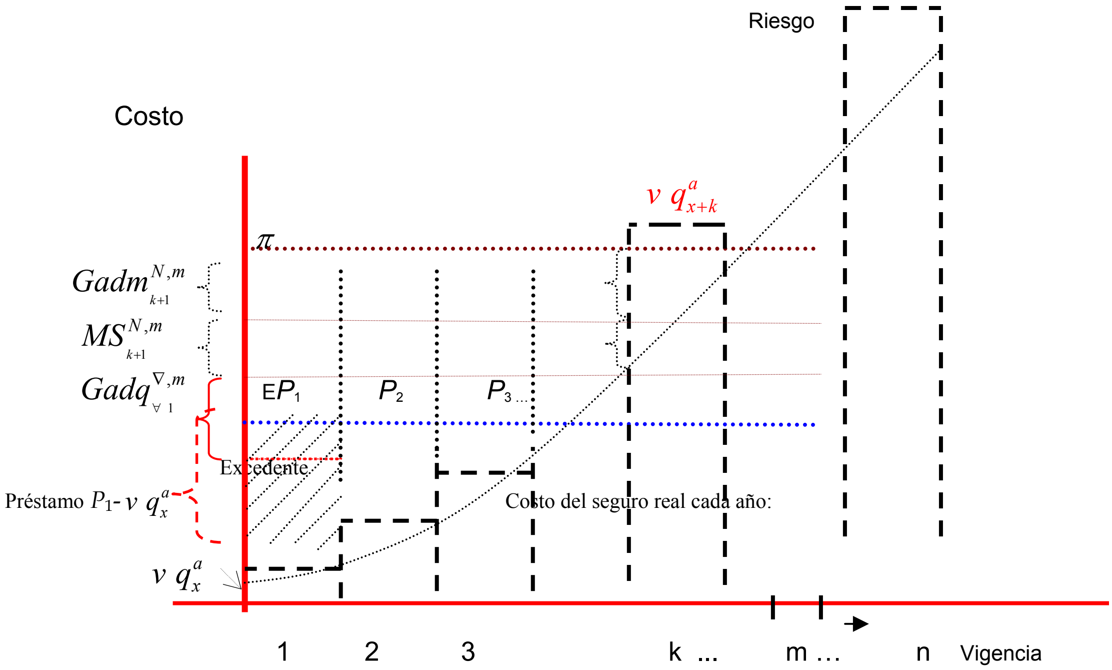


Gráfica 3

Esta problemática de valores negativos en la reserva matemática dentro de los primeros años fue abordado en su momento por ***August Zillmer*** en 1863, quien advierte que, bajo estos esquemas de ***gastos de adquisición decrecientes***, el proceso tradicional de determinar la reserva matemática con esquemas de gastos de adquisición nivelados, ubica a la compañía de seguros en una situación de desequilibrio en los primeros años, así en su obra titulada "***contribuciones a la teoría de las reservas de primas de seguros de vida***", propone un sistema de primas escalonadas, de tal manera que en el primer año se tenga una prima inferior a la prima nivelada, destinando la diferencia a cubrir gastos del primer año.

En otras palabras, este sistema de reserva permitirá a la compañía de seguros reducir sus pasivos (reserva), teniendo en cuenta los altos costos por recargos del primer año y realizando una provisión adecuada que generalmente es el costo del seguro por el primer año $\left(v\ q_x^a\right)$, proceso que se le denomina ***Reserva Matemática Modificada,*** el método así propuesto establece disminuir la prima neta nivelada del primer año, estableciendo para ello una cota inferior, la cual deberá ser suficiente para cubrir por lo menos los costos por reclamaciones en ese año, particularidad a la que se le conoce como ***Sistema de Reserva Año Temporal Preliminar (ATP).***

Del proceso indicado, la cantidad que se puede tomar de la prima de primer año como ***préstamo*** para futuros años, deberá fluctuar en el intervalo $[0, P_1 - v\ q_x^a]$; donde P_1 *-dada las característica del modelo-*, corresponde a la prima neta nivelada del primer año, la siguiente gráfica ilustra el concepto.



Gráfica 4

En términos generales, el ***sistema modificado de reservas*** se conceptualiza, no como el conjunto de primas niveladas $P_1, P_2 \ldots, P_m$ con el que en forma inicial se han determinado las obligaciones del asegurado, si no como un conjunto de primas modificadas, denotadas como P_1^{mod} y P_2^{mod}, para el primero y segundo año respectivamente y en forma particular igual a partir del segundo año de vigencia, es decir, $P_2^{mod} = P_3^{mod} = P_4^{mod} = \ldots$, por lo tanto, el conjunto anterior de primas, deben ser determinadas de forma tal que cumpla la condición de que el valor presente actuarial de las primas $P_1, P_2 \ldots, P_m$, sea equivalente al valor presente actuarial de las primas modificadas.

$$P_1^{mod} + \sum_{k=1}^{m-1} P_2^{mod} v^k\ {}_k p_x = \sum_{k=0}^{m-1} P_{k+1} v^k\ {}_k p_x = A_{(x,n)} \qquad (8)$$

En particular P_1^{mod} no podrá ser menor costo de reclamación esperado del primer año ($v\ q_x^a$) y $A_{(x,n)}$ denotará la forma genérica para definir la prima neta única de un seguro de vida a n años, por lo tanto P_1^{mod} será la prima modificada de primer año a determinar de un conjunto de primas limitada a m años o incluso igual a la duración del seguro; m=n, considerando para su modelación actuarial dos aspectos importantes:

1) ¿Qué tanto en valor en préstamo se deberá considerar?, bajo el supuesto de que el préstamo debe fluctuar en el intervalo [0, P_1- $v\ q_x^a$]

2) ¿Cuál es el tiempo de amortización o recuperación de éste?

En general, el problema a resolver atañe más a cuestiones prácticas de la comercialización del seguro, en donde la dinámica de los gastos decrecientes de adquisición determina el valor de la prima de primer año; sin embargo, no es limitativo el considerar la posibilidad de esquemas donde se disponga en préstamo los recursos incluso del segundo año, originado con ello una diversidad de modelos, entre los modelos de sistema modificados se tiene los siguientes:

- Método Illinois estándar
- Método Canadiense
- Comisionados

En particular en México, durante el periodo de 1943 al 2003, se adoptó para el caso de primas de tarifa con gastos de adquisición decrecientes el sistema de reserva ***Año Temporal Preliminar (ATP),*** bajo dos variantes de modelación, denominados.

- *Año Temporal Preliminar Completo* (ATPC)
- *Año Temporal Preliminar Modificado* (ATPM)

Su diferencia se basa en la temporalidad del producto, forma de pago y los esquemas de gastos involucrados, todos ellos para la formulación de la prima modificada del primer año (P_1^{mod}).

En forma general, para la modelación de P_1^{mod}, se observa en la práctica que los seguros de vida entera con pagos de primas limitados y los seguros dotales de duración corta, consideran altos gastos de adquisición en el primer año que los que realmente son necesarios; en esta virtud, se estableció las siguientes consideraciones definidas en las expresiones (9) a la (13) para la determinación de la prima modificada de primera año y de la reserva modificada correspondiente, es decir, si la ***PNN*** del plan de que se trate es menor o igual a la ***PNN*** de un seguro dotal con temporalidad a 20 años

$$PNN^{del\ plan\ de\ que\ se\ trate}{}_{x:\overline{n}|} \leq PNN^{dotal}{}_{x:\overline{20}|} \tag{9}$$

se aplica el método denominado:

Año Temporal Preliminar Completo (*ATPC*)

en este caso, la compañía podrá disponer de todo el préstamo: $P_1 - v\ q_x^a$

Por lo tanto, la prima modificada del primer año para la expresión (8) es***:***

$$P_1^{mod} = v\ q_x^a \tag{10}$$

en caso contrario, se considerará el método denominado:

Año Temporal Preliminar Modificado (*ATPM*)

donde la compañía podrá disponer como préstamo la diferencia que resulta entre la prima neta nivelada del dotal con temporalidad a 20 años y prima neta nivelada del plan de que se trate.

Por lo tanto, la prima modificada del primer año para la expresión (8) será***:***

$$P_1^{mod} = v\ q_x^a + \left(PNN^{del\ plan\ de\ que\ se\ trate}{}_{x:\overline{n}|} - PN^{dotal}{}_{x:\overline{20}|} \right) \tag{11}$$

En ambos casos:

La prima modificada del segundo año en adelante será:

$$P_k^{\text{mod}} = \frac{A_{(x,n)} - P_1^{\text{mod}}}{v\ p_x^a * \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} \quad \forall \ k = 2,3,... \tag{12}$$

y su reserva matemática modificada:

$${}_kV_x = \frac{\left({}_{k-1}V_x + P_2^{\text{mod}} \right) * (1+i) - q_{x+k-1}^a}{p_{x+k-1}^a} \quad \forall \quad k = 2,3,.. \tag{13}$$

En el mes de septiembre de 2003, se publicó en el ***diario oficial de la federación*** (DOF) la forma y términos para valuar la ***Reserva de Riesgos en Curso*** del seguro de vida a corto y largo plazo *-éste último denominado Reserva Matemática-*, estableciéndose como punto principal la suficiencia de éstas.

En particular, la premisa *–aunque no se indica-* se basa en establecer un modelo de sistema de reserva proveniente de ***gastos de adquisición de tipo decreciente***, por lo tanto, la cota inferior para su constitución denominada ***Reserva Mínima***, parte de la idea propuesta por ***Zillmer*** y no limita el poder considerar el método denominado ***ATP*** siempre y cuando éste, sea superior al modelo de *Reserva Mínima* que se muestra en el documento oficial, en otras palabras, la reserva riesgos en curso para los seguros con temporalidad superior a un año, no podrá ser inferior a la reserva que se obtenga mediante la aplicación del método actuarial denominado *Reserva Mínima*.

En las siguientes páginas no se pretende transcribir el documento oficial antes citado, si no por el contrario se pretende presentar en forma analítica la deducción matemática de las expresiones mostradas, en virtud de carecer de una bibliografía o fuente documentada que aborde el proceso correspondiente y complementar la circular S-10.1.7 para el caso de valor de rescate.

MODELO ACTUARIAL DE LA RESERVA MÍNIMA.

El contexto del método para el sector asegurador mexicano, se basa en el estudio racional del "***préstamo***"*-ya abordado por Zillmer-*, que se obtiene en el primer año al considerar por separado los efectos de:

- *Costo de adquisición decreciente* ($Gadq_1^{\nabla,m\to n}$) *versus costo de adquisición nivelado* ($Gadq_1^{N,m}$), referidos en porción de la *Prima de Tarifa,* es decir, $\left(Gadq_1^{\nabla,m} - Gadq_1^{N,m}\right)\,\pi$, a la que se le denomina pérdida esperada del primer año, denotada con PE_1; y
- La *prima neta nivelada del producto que se trate versus su costo del seguro en ese año*, es decir, $P_1 - v\,q_x^a$, cantidad que se le denomina prima de ahorro del primer año (PAH_1)

Tomando en consideración lo anterior, la cantidad en préstamo deberá fluctuar dentro del intervalo [0, $P_1 - v\,q_x^a$], en particular $v\,q_x^a$ es el costo real del seguro en el primer año, al que denotaremos como CS_1, en esta virtud la pérdida esperada del primer año (PE_1) no podrá ser mayor a la cota superior del préstamo propuesto por ***Zillmer***; por lo que actuarialmente debe cumplirse que:

$$\left(Gadq_1^{\nabla,m} - Gadq_1^{N,m}\right)\,\pi \le P_1 - CS_1 \tag{14}$$

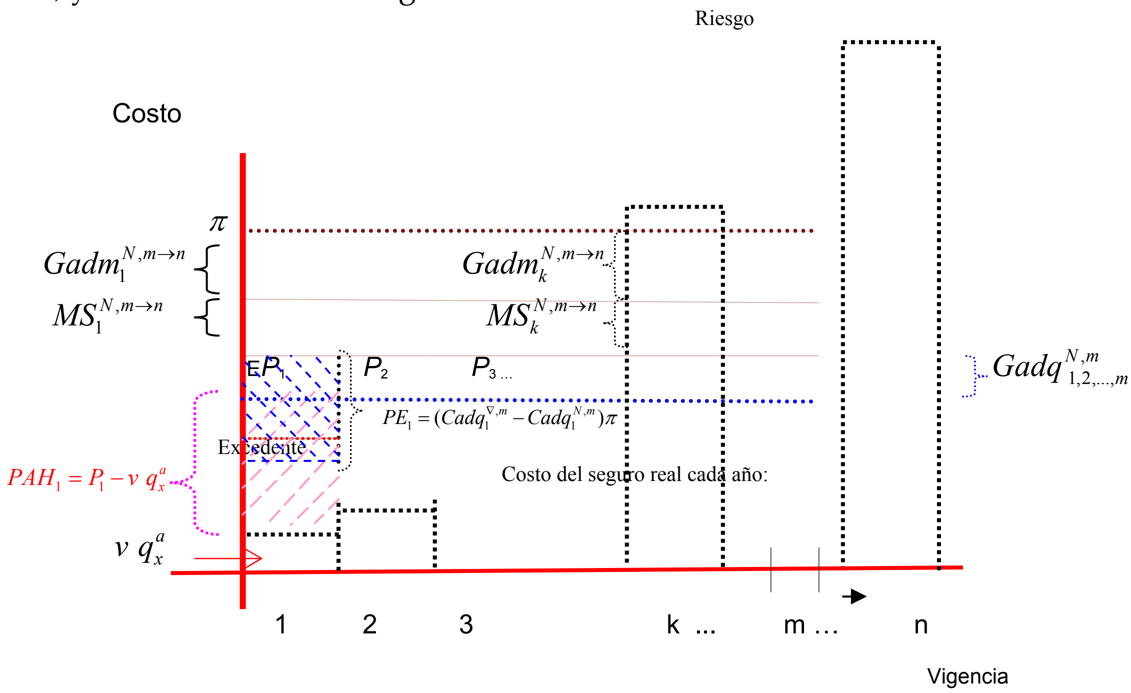
Por lo tanto, el préstamo será el mínimo entre PE_1 y PAH_1, cantidad a la que se le denominará ***Pérdida Amortizable*** del primer año y su expresión será

$$PA_1 = Mín\left(PE_1, PAH_1\right) \tag{15}$$

en particular el costo de adquisición nivelado $\left(CAdq^N_{\forall\, k=1,2,\ldots,m}\right)$, se obtiene al amortizar actuarialmente el valor presente actuarial de los gastos de adquisición de tipo decreciente al inicio de vigencia del seguro mediante el siguiente proceso.

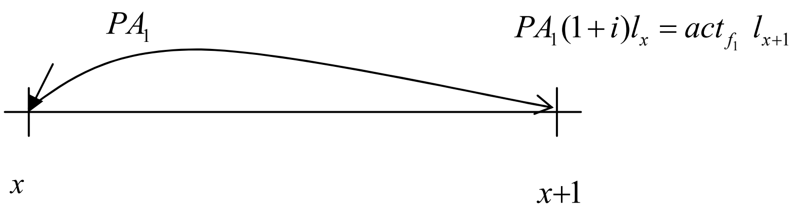
$$CAdq_1^{N,m} = CAdq_2^{N,m} = \ldots = CAdq_m^{N,m} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} CAdq_{k+1}^{\nabla,m}\cdot v^k\;{}_k p_x}{\sum_{k=0}^{m-1} v^k\cdot{}_k p_x} \tag{16}$$

A efecto de ejemplificar lo anterior, en la gráfica (5) muestra la relación existente entre la pérdida esperada y la prima de ahorro, ambas en el primer año; y ele efecto de los recargos involucrados.



Gráfica 5

La cantidad así obtenida (PA_1) en ***"préstamo"*** deberá ser amortizada durante el periodo restante de ingreso de primas, es decir, a partir del segundo año de vigencia del seguro (Am_k), una vez que se haya actualizado actuarialmente al final del primer año de vigencia del seguro (act_{f_1}), para este efecto, se considera una tasa de inversión fija anual de interés (i), que aplicada sobre el total de asegurados (l_x), definirá actuarialmente su actualización suficiente para los sobrevivientes de edad (x+1); gráficamente, se tiene.



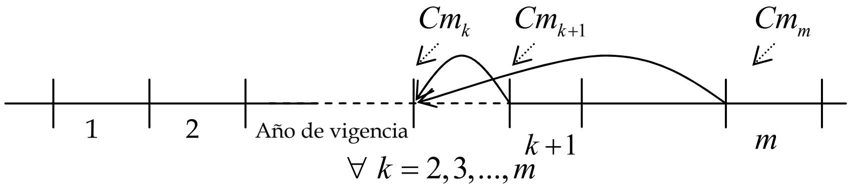
Gráfica 6

La actualización del préstamo al final del primer año es $act_{f_1} = \dfrac{PA_1}{{}_1E_x}$ y la amortización del préstamo ha reconocer a partir del inicio del segundo año de vigencia y hasta el periodo m de primas, corresponde al valor presente actuarial de las cantidades $Cm_2 = Cm_3 = \cdots = Cm_m$, como incógnitas del modelo, por lo tanto, las cantidades de amortización $Cm_{\forall\ k=2,3,\dots,m}$ se obtiene como

$$Cm_{\forall\ k=2,3,\dots,m} = \frac{Act_{f_1}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} = \frac{PA_1}{{}_1E_x\ \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} \tag{17}$$

Así el valor presente actuarial de las cantidades constantes de préstamo$\left(Cm_{\forall\ k=2,3,\ldots,m}\right)$, deberán ser descontadas de la reserva matemática de primas niveladas a cada año $k = 2,3,\ldots,m$; lo anterior, con objeto de retribuir en los subsecuentes periodos de ingreso de primas la cantidad en préstamo que se efectuó en el primer año de vigencia del seguro.

Por lo tanto, el comportamiento gráfico a partir del segundo año de vigencia del seguro es



Gráfica 7

y el valor presente actuarial de $Cm_{\forall\ k=2,3,\ldots,m}$ a partir del segundo año de vigencia del seguro, definido como la anualidad de amortización $\left(AM_{\forall\ k=2,3,\ldots,m}\right)$, queda definida como

$$AM_{\forall\ k=2,3,\ldots,m} = \frac{PA_1}{{}_1E_x\ \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} \cdot \ddot{a}_{x+(k-1):\overline{m-(k-1)}|} \tag{18}$$

así la ***reserva matemática terminal modificada "mínima"***$\left({}_kV_{\text{mod}}^{Mín}\right)$, **a partir del segundo año de vigencia del seguro**, será determinada como la diferencia entre la ***reserva matemática pura***$\left({}_kV\right)$ y el valor presente actuarial de las cantidades en préstamo por amortizar$\left(AM_k\right)$.

$${}_kV_{\text{mod}}^{Mín} = \begin{cases} {}_kV - AM_k & \forall\ k = 2,3,\ldots,m \\ {}_kV & \forall\ k = m+1,\ldots.,n \end{cases} \tag{19}$$

No obstante lo anterior, el cálculo de la reserva matemática modificada $\left({}_kV^m\right)$ que proponga una institución de seguros, no podrá ser menor a la que resulte de la denominada ***"Reserva Mínima"***, la cual constituye la cota inferior de los sistemas modificados de reserva $\left({}_kV_{\text{mod}}^{Mín}\right)$, es decir.

$${}_kV^m \geq {}_kV_{\text{mod}}^{Mín} \quad \forall\ k = 2,3,\ldots,m-1$$

Por lo que respecta a la reserva matemática del sistema de reserva mínima exacta dentro del primer año de vigencia del seguro, para cualquier valor $s \in [0,365]$, donde s representa el día, deberá considerar dos aspectos importantes:

a) El costo esperado de siniestralidad del primer año ($v\, q_x^a$) devengado, el cual corresponde al costo real al inicio del primer año de vigencia del seguro; y

b) El excedente, si lo hubiera, entre la prima de ahorro y la pérdida amortizable; razonamiento ya descrito para la expresión (15).

Dado que el objetivo conforme al supuesto de *Zillmer* de constituir por lo menos el costo del seguro del primer año y bajo el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos, se tiene que dichas cantidades acumuladas actuarialmente al día s dentro del primer año de vigencia del seguro para una edad $x+\frac{s}{365}$, es:

$$l_{x+\frac{s}{365}} \cdot {}_{\frac{s}{365}}V_{\text{mod}}^{Mín} \cong \begin{cases} \left\{ v \cdot q^a{}_x \left[\dfrac{365-s}{365} \right] + \left[PAH_1 - PA_1 \right] (1+i)^{\frac{s}{365}} \right\} l_x \Leftrightarrow PAH_1 > PA_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall \;\; s \in [0,365] \\ \textit{en caso contrario} \\ \left\{ v \cdot q^a{}_x \left[\dfrac{365-s}{365} \right] \right\} l_x \end{cases} \qquad (20)$$

o en su forma más estructurada

$${}_{\frac{s}{365}}V_{\text{mod}}^{Mín} \cong \frac{\left\{ v \cdot q^a{}_x \left[\dfrac{365-s}{365} \right] + máx\left[0, PAH_1 - PA_1 \right] (1+i)^{\frac{s}{365}} \right\}}{1 - \left[\dfrac{s}{365} \right] q_x} \qquad (21)$$

Expresión que varía en el denominador a la definida en el documento oficial antes citado y definido en la circular S-10.1.7.1, ya que considera p_x, pero este efecto se justifica bajo el supuesto de distribución uniforme de fallecimientos, es decir, ${}_tp_x \;\; \mu_x(t) = q_x; \;\forall\; t \in [0,1]$, por lo que resulta útil para efectos prácticos de la compañía aseguradora, de igual forma, en este punto, se denota con ${}_1V$ a la reserva en estudio, por lo que para efectos de consistencia de notación actuarial debiera ser ${}_{\frac{s}{365}}V_{\text{mod}}^{Mín}$, ya que el objetivo es expresar la reserva exacta a un día s específico, dentro del primer año de vigencia del seguro.

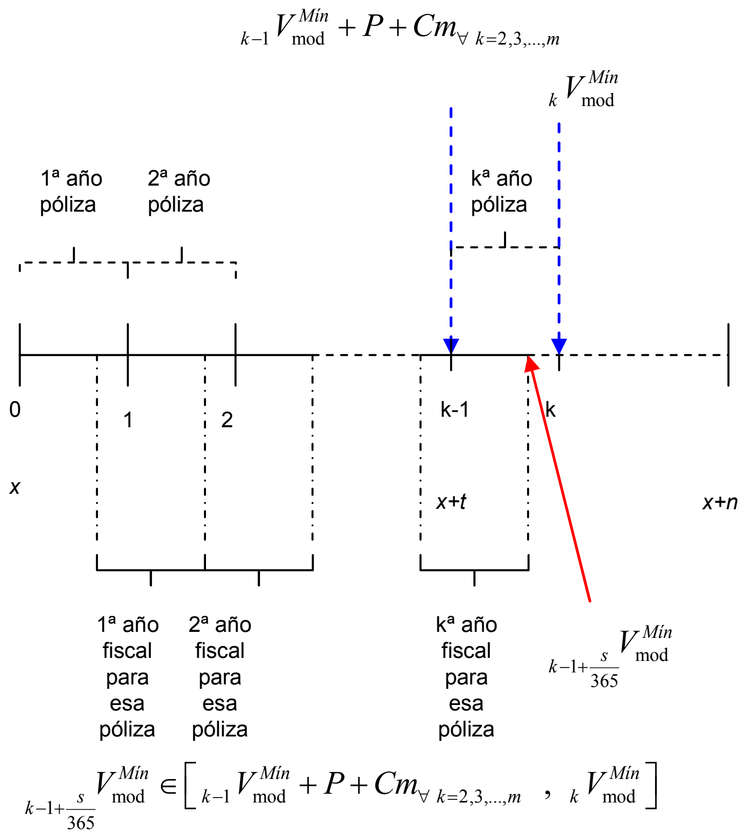
RESERVA EXACTA MODIFICADA MÍNIMA

Las expresiones (19) y (21) corresponden al proceso de la reserva matemática modificada mínima para cada año póliza $k = 2,3,,...,n$ y la reserva exacta dentro del primer año de vigencia del seguro, respectivamente, sin embargo, para completar el análisis sobre de la reserva matemática mínima, es necesario definir el proceso para un valor s posterior al primer año de vigencia del seguro, necesario para los reportes intermedios del año póliza o de tipo fiscal-contable .

Por lo tanto, al igual que en el análisis efectuado dentro del primera año de vigencia del seguro, la reserva matemática modificada mínima para cada año $k = 2,3,,...,n$, debe cumplir que

$$_{k-1+\frac{s}{365}}V_{\text{mod}}^{Mín} \in \left[{}_{k-1}V_{\text{mod}}^{Mín} + P + Cm_{\forall\ k=2,3,...,m} \quad , \quad {}_{k}V_{\text{mod}}^{Mín} \right] \tag{22}$$

donde P representa la prima neta nivelada y $Cm_{\forall\ k=2,3,...,m}$ es la cantidad de amortización ya antes analizada, es esta virtud, al inicio de cada periodo se tiene la reserva, la prima neta antes de recargos y la cantidad de amortización, en forma gráfica su comportamiento es el siguiente.



Gráfica 8

Su aproximación considerando el mismo supuesto de distribución uniforme de siniestralidad ya antes visto, corresponde al valor inicial de la reserva en el año (*k-1*) y la porción o parte del incremento entre el valor final de la reserva al año (*k*) y su valor inicial (*k-1*), es decir,

$$ {}_{k-1+\frac{s}{365}}V^{Mín}_{\text{mod Exacta}} \cong \left[{}_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} + P + \frac{PA_1}{{}_1E_x \; \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1|}}} \right] + \left(\frac{s}{365} \right) \cdot \Delta_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} \tag{23} $$

(23)

donde

$$ \Delta_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} = {}_kV^{Mín}_{\text{mod}} - \left[{}_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} + P + \frac{PA_1}{{}_1E_x \; \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1|}}} \right] \tag{24} $$

y realizando las simplificaciones correspondientes, se tiene que la reserva exacta modificada mínima para un año $k = 2,3,,...,n$ y $s \in [1,365]$ es

$$ {}_{k-1+\frac{s}{365}}V^{Mín}_{\text{mod Exacta}} \cong \begin{cases} \left[\frac{s}{365} \right] {}_kV^{Mín}_{\text{mod}} + \left[\frac{365-s}{365} \right] \left[{}_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} + P + \frac{PA_1}{{}_1E_x \cdot \ddot{a}_{x+1:\overline{m-1|}}} \right] \\ \qquad k = 2,...,m-1 \\ \\ \left[\frac{s}{365} \right] {}_kV^{Mín}_{\text{mod}} + \left[\frac{365-s}{365} \right] \left[{}_{k-1}V^{Mín}_{\text{mod}} \right] \\ \qquad k = m, m+1, ...n-1 \end{cases} \tag{25} $$

Observemos que la segunda expresión es una consecuencia directa del agotamiento del reconocimiento del préstamo, definido durante el periodo de pago de primas limitadas.

Es común definir para efectos contables (fiscales) el concepto de ***reserva media***, la cual tiene como supuesto que la distribución de la emisión de la cartera es de tipo uniforme dentro del intervalo del año póliza y que en conjunto bajo el teorema del limite central, el valor esperado de la cartera es ½ y con ello simplificar el reporte de la reserva al 31 de diciembre de cada año; por lo tanto, basta considerar que la fracción *s/365* de la expresión (25) sea ½, y su interpretación que se tiene es "*como si todo la cartera se hubiera emitido a la mitad del año*".

En forma general, el modelo propuesto se basa en un sólo decremento y pagos anuales, sin embargo, en casos especiales deberá hacerse las adecuaciones necesarias conforme a las causas involucradas y tipo de pago fraccionado efectuado dentro del año póliza.

Consideraciones especiales

Reserva (Provisión) de Gastos de Administración

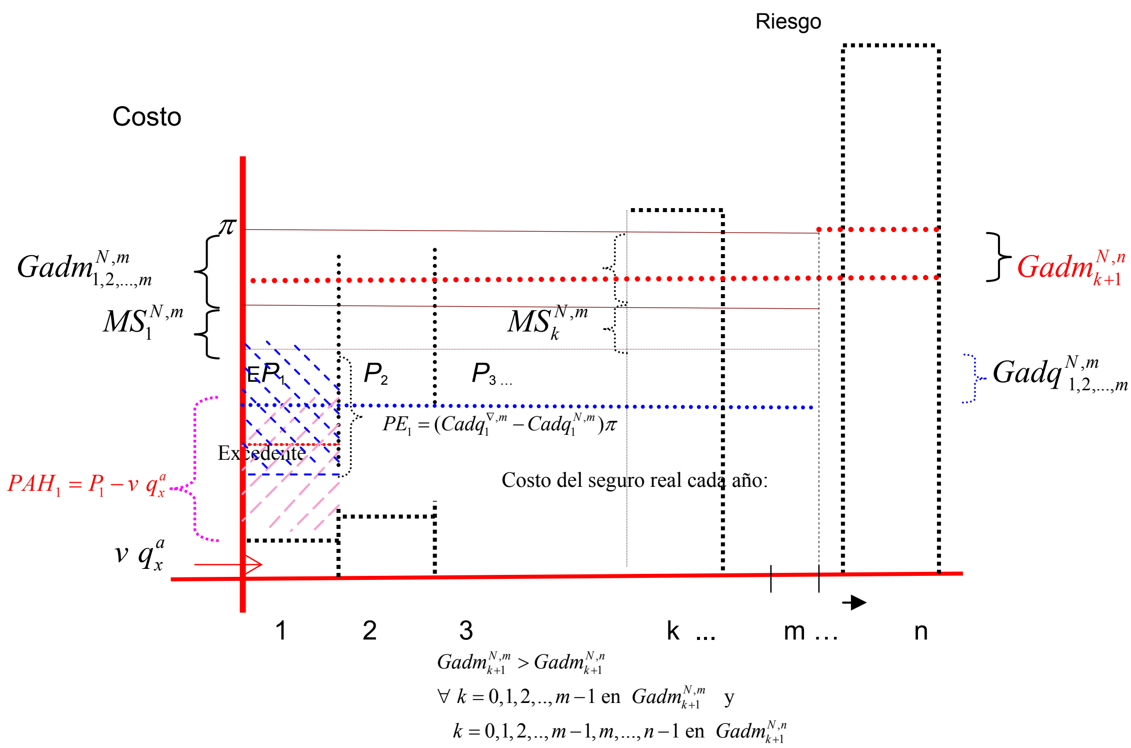
Desde el punto de vista administrativo, los seguros con pago de primas en forma limitada a ***m-años*** o con periodicidad de pago de primas menor al periodo de cobertura básica, deberá prever una reserva o provisión por los gastos de administración u operación a generarse posteriores a la fecha de ingreso de la última prima recibida, independientemente del esquema de gastos de administración del seguro, es decir, sean nivelado o decreciente.

Esta provisión se logra distribuyendo actuarialmente el conjunto de recargos por administración que se espera tener en forma limitada, durante el periodo de cobertura u objeto del seguro, proceso que se le denomina ***Reserva (Provisión) de Gastos de Administración***, bajo esta definición, los gastos de administración nivelados a n años $\left(Gadm_{k+1}^{N,n}\right)$ que se obtiene por el ingreso de primas de tarifa en los próximos m años, considerando un seguro temporal a n años es

$$Gadm_{k+1}^{N,n} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} Gadm_{k+1}^{N,m}\ v^k \cdot {}_k p_x}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x} \qquad (26)$$

$$\forall\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

y su comportamiento gráfico es el siguiente.

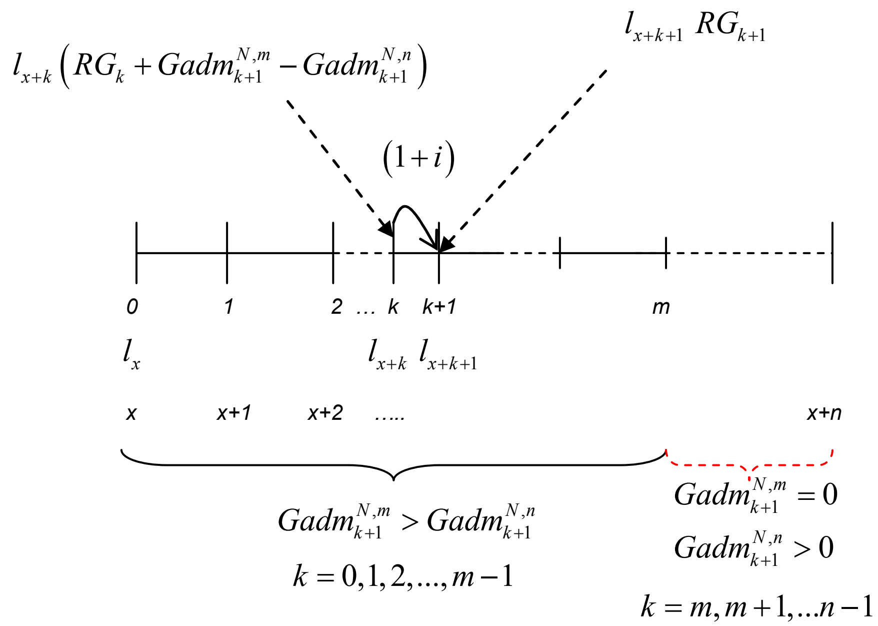


Gráfica 9

Por lo tanto, la ***Reserva de Gastos de Administración anual***, bajo un proceso de acumulación actuarial interactiva o modelo de Fackler, se integrará con la reserva a constituir al inicio del periodo $\left(RG_k\right)$ más la diferencia entre el gasto de administración definido en el modelo de la prima de tarifa $\left(Gadm_{k+1}^{N,m}\right)$ y la que se obtiene en forma nivelada para el periodo del seguro$\left(Gadm_{k+1}^{N,n}\right)$, es decir

$$l_{x+k+1} \cdot RG_{k+1} = \left[RG_k + Gadm_{k+1}^{N,m} - Gadm_{k+1}^{N,n} \right] (1+i)\, l_{x+k} \qquad (27)$$

que en forma gráfica su deducción se obtiene del proceso interactivo entre los años *k* y *k+1*, como se muestra a continuación.



Gráfica 10

En este proceso $Gadm_{k+1}^{N,m} > Gadm_{k+1}^{N,n}$ en los primeros ***m*** periodos de pago de primas, por lo tanto.

$$RG_{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\left[RG_k + Gadm_{k+1}^{N,m} - Gadm_{k+1}^{N,n} \right](1+i)}{p_{x+k}} & k = 0,1,2,\ldots,m-1 \\[2ex] \dfrac{\left[RG_k - Gadm_{k+1}^{N,n} \right](1+i)}{p_{x+k}} & k = m, m+1, \ldots n-1 \end{cases} \qquad (28)$$

En forma específica en $k = 0$, la reserva de gastos $RG_0 = 0$

Bajo un razonamiento semejante, al efectuado para obtener la expresión (25) relativa a la ***Reserva Modificada Mínima exacta***, nos permitirá obtener la ***Reserva de Gastos de Administración en forma exacta.***

Consideremos que esta reserva se requiere determinar a ***s*** días después del año póliza, por lo tanto la reserva requerida en el tiempo $k+\frac{s}{365}$, estará definida entre los tiempos k y $k+1$; $\forall \; k=0,1,2,...$ de la siguiente forma.

$$RG_{k+\frac{s}{365}} = \begin{cases} \left[\frac{s}{365}\right] RG_{k+1} + \left[\frac{365-s}{365}\right]\left[RG_k + Gadm_{k+1}^{N,m} - Gadm_{k+1}^{N,n}\right] \\ \qquad \forall \; k=0,1,2,3,...m-1 \\ \\ \left[\frac{s}{365}\right] RG_{k+1} + \left[\frac{365-s}{365}\right]\left[RG_k - Gadm_{k+1}^{N,n}\right] \\ \qquad \forall \; k=m,m+1,...,n-1 \end{cases} \tag{29}$$

Bajo un razonamiento semejante para el cálculo de la reserva media, si la fracción *s/365* es sustituida por ½, se obtendrá para la reserva media de gastos de administración para efectos fiscales.

VALOR DE RESCATE

En la legislación Mexicana se establece en la ***Ley sobre el contrato de seguro (LSCS)***[3], una particularidad en los seguros de vida con esquemas de cobertura de temporalidad mayor o igual a diez años, indicando que para aquellos casos donde después de haber cubierto tres anualidades consecutivas de pago de primas, el asegurado tendrá derecho al reembolso inmediato de una parte de la reserva matemática, dado lo anterior, en forma intuitiva e inicial el reembolso o ***valor de rescate***, definido así en la práctica actuarial, en su forma racional deberá corresponder a la reserva matemática terminal que se tenga a la fecha de su requerimiento conjuntamente con la prima anual descontada de recargos menos los recargos pendiente de ingreso por falta de primas, es decir, como valor de penalización, en otras palabras descontar el valor esperado de los ingreso futuros previsto como compromiso ya definido en la prima de tarifa.

Este proceso en su forma intuitiva es la siguiente

$${}_k(VR)_x = {}_kV + P_{k+1} - \left|Futuros\ Gastos\right|, \; \forall \quad k=3,4,...,m-1 \tag{30}$$

k es el año de valuación.

(3) LSCS: Ley Sobre el Contrato del Seguro:
Art. 182. El asegurado que haya cubierto tres anualidades consecutivas, tendrá derecho al reembolso inmediato de una parte de la reserva matemática, de acuerdo también con las normas técnicas establecidas para el caso, las cuales deberán figurar en la póliza.
Art. 184. El seguro temporal cuya duración sea inferior a diez años, no obligará a la empresa a conceder valores garantizados para el caso de muerte.

Estos **futuros gastos**, se deben conceptualizar como los ***gastos no incurridos*** por el ***asegurado,*** derivado de la cancelación de póliza, a un cuando la prima de riesgo pudiera haberse formulado con factores de cancelación.

Dichos gastos no incurridos en forma práctica son los de administración, adquisición y el margen de seguridad, definido en la ecuación de valor para la determinación de la prima de tarifa, los cuales deberán ser considerados como valores de penalización sobre la reserva matemática en caso de rescate una vez ingresada la tercera prima anual.

Como se definió al inicio de este documento, la ***prima de tarifa*** o *de cobro* **(** π **),** expresión (5), presenta en su estructura conceptual la relación siguiente.

$$\pi * E\left[Y\right] = P * E\left[Y\right] + E\left[R_{k+1}^{\%\pi}\pi \ Y\right] + E\left[R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} \cdot SA_{k+1} \ Y\right]; \quad \forall \ k = 0,1,2,... \qquad (31)$$

Donde el valor esperado del conjunto de primas de tarifa, debe ser equivalente al valor esperado del conjunto de primas netas nivelas$\left(P\right)$ más los recargos esperados, definidos como porcentaje de la prima de tarifa $\left(R_{k+1}^{\%\pi} \cdot \ \pi\right)$o al millar de la suma asegurada pactada $\left(R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} \cdot SA_{k+1}\right)$ o la combinación de ambas al año (*k+1*); por lo tanto, redefiniendo la expresión (30) para efecto de ser congruente con la variable aleatoria asociada a *K*(*x*), se tiene que los futuros gastos, una vez ingresada la tercera prima anual, es:

$$Futuros \ Gastos_{k+1} = \begin{cases} 0 \ ; \quad \forall \quad k = 0,1 \\ \\ E\left[Dif\left(R_{k+1}^{\%\pi}\right)\pi \ Y\right] + E\left[Dif\left(R_{k+1}^{0/00 \cdot SA}\right) \cdot SA_{k+1} \ Y\right]; \\ \qquad \forall \ k = 2,3,4,...9,... \end{cases} \qquad (32)$$

Sin embargo, este esquema bajo el concepto de **recargos nivelados** su valor es nulo, ya que el valor esperado de las diferencias es cero, lo que da como resultado que el valor de rescate a partir del tercer año de vigencia del seguro sea la propia reserva matemática y la prima de ingresos sin recargos, situación que contradice la disposición definida en la LSCS, al decir, "…***tendrá derecho al reembolso inmediato de una parte de la reserva matemática, …***".

Por otra parte, se indica que será de acuerdo con las normas técnicas establecidas para el caso, sin embargo, en la práctica se ha propuesto modelos basados en factores de ponderación sobre la reserva matemática a partir del tercer año, consistente en un 75% de la reserva matemática e incrementada en forma lineal para llegar a un 100% sobre la reserva matemática del último año de valuación y en otros casos se ha propuesto el modelo definido en las expresiones (30) y (31), sin embargo para el caso de seguros con esquemas de recargos nivelados no es factible dado el razonamiento mostrado en la expresión (32) y que se demostrará en el desarrollo de las expresiones (53) y de la (68) a la (71) que más adelante se obtienen.

En esta virtud, esta situación se convierte en la línea de estudio, a efecto de proponer una solución, para lo cual será necesario establecer ciertas consideraciones técnicas para la modelación actuarial del ***Valor de Rescate***.

De las expresiones (30) a (32) se tiene una "expresión "inicial" del valor de rescate, como:

$$
{}_k\left(VR\right)_x = \begin{cases} \textit{Sistema de recargos nivelados} \\ {}_kV + P_{k+1};\ \forall \quad k = 0,1,2,\ldots \\ \\ \textit{Sistema de recargos decrecientes} \\ {}_kV + P_{k+1} - \left\{ E\left[R_{k+1}^{0/00\cdot SA} SA_{k+1} \ \ Y \right] + E\left[R_{k+1}^{\%\pi} \pi \ \ Y \right] \right\} \\ \forall \quad k = 2,3,\ldots \end{cases}
$$

Contradicción con la LSCS

"…tendrá derecho al reembolso inmediato de una parte de la reserva matemática, …

(33)

No definitiva

(34)

Expresiones que siempre serán positivas de acuerdo a la condición del año (*k+1*); en forma particular, cuando el proceso involucra recargos de tipo decreciente, siempre deberá de cumplirse que *"el recargo decreciente a partir del tercer año* $\left(Gadq_{k+1}^{\nabla}\right)_{\forall\ k=2,3,\ldots}$*, nunca será ser superior al que se obtenga en forma nivelada*$\left(Gadq_{k+1}^{N,\, m\to n}\right)$*"*.

En la práctica del seguro de vida los recargos por administración y margen de seguridad son por lo general de tipo nivelado, en esta virtud podemos centrar el estudio sobre los gastos de adquisición de tipo decreciente; así el gasto de adquisición nivelado$\left(Gadq_{k+1}^{N,m\to n}\right)$ queda definido para un seguro de vida con temporalidad a *n*-años y *m* pagos de primas anuales como

$$
Gadq_{k+1}^{N,\, m\to n} = \frac{\sum_{k=0}^{2} Gadq_{k+1}^{\nabla,\, m\to n} \cdot {}_k p_x \cdot v^k + \sum_{k=3}^{m-1} Gadq_{k+1}^{\nabla} \cdot {}_k p_x \cdot v^k}{\sum_{k=1}^{m-1} {}_k p_x \cdot V^k} \tag{35}
$$

donde

$Gadq_{k+1}^{\nabla,\, m\to n}$: Gasto de adquisición decreciente, a lo más en los tres primeros años; *k*=0,1,2.

$Gadq_{3,4,\ldots}^{\nabla,\, m\to n} \leq Gadq_{k+1}^{N,\, m\to n};\quad \forall \quad k = 0,1,2,\ldots$

Dada las consideraciones anteriores, se puede demostrar que $\forall \quad k=2,3,...$ el valor de rescate es siempre positivo, es decir, al descontar a la reserva terminal año (*k+1*) el valor esperado del conjunto recargos definidos como porcentaje de la prima de tarifa $\left(R_{k+1}^{\%\pi} \cdot \pi\right)$o al millar de la suma asegurada pactada $\left(R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} \cdot SA_{k+1}\right)$o la combinación de ambas, su resultado es siempre positivo.

Consideremos el proceso con recargos de tipo nivelado a partir del tercer año de vigencia del seguro.

Demostración:

Consideremos la expresión (34) que es la forma genérica del valor de rescate al año (*k+1*) asociada con la variable aleatoria $K(x)$ y su equivalente valor para la reserva matemática como ${}_{k+1}V = A_{(x+k+1)} - P_{(x)}E[\,Y]$, por lo tanto el la expresión puede reescribir de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
{}_{k+1}(VR)_x &= A_{(x+k+1)} - P_{(x)}E[\,Y] - R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1}E[\,Y] - R_{k+1}^{\%\pi}\pi E[\,Y] \\
&= A_{(x+k+1)} - E[\,Y]\left\{P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi\right\}
\end{aligned}$$

donde

$A_{(x+k+1)}$	Seguro en cuestión u obligación de la compañía a edad (*x+k+1*)
$P_{(x)}$	Prima neta nivelada "constante en el tiempo", expedida a edad (*x*).
$R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1}$	Valor al millar de la suma asegurada
$R_{k+1}^{\%\pi}\pi$	Porcentaje de la prima de tarifa
$E[\,Y] = \dfrac{1-Z}{d} = \dfrac{1-A_{(x+k+1)}}{d}$	Anualidad en forma genérica, asociada a la variable aleatoria Z "indemnización el tiempo", d es la tasa de descuento. $d = \dfrac{i}{1+i}$; i>0; (i): tasa de interés anual.

Sustituyendo $E[\,Y]$ en la expresión ${}_{k+1}(VR)_x$, se tiene que

$$\begin{aligned}
{}_{k+1}(VR)_x &= A_{(x+k+1)} - \frac{1-A_{(x+k+1)}}{d}\left[P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi\right] \\
&= A_{(x+k+1)} - \frac{P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d} + A_{(x+k+1)}\frac{P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d} \\
&= A_{(x+k+1)}\left\{1 + \frac{P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}\right\} - \frac{P_{(x)} + R_{k+1}^{0/00 \cdot SA} SA_{k+1} + R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}
\end{aligned}$$

Por construcción de $A_{(x+k+1)}$; $P_{(x)}$; $R_{k+1}^{0/00\cdot SA}SA_{k+1}$; $R_{k+1}^{\%\pi}\pi$; d, el término $\dfrac{P_{(x)}+R_{k+1}^{0/00\cdot SA}SA_{k+1}+R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}$ es un valor positivo, por lo tanto el primer término $A_{(x+k+1)}$ al ser incrementado por el factor

$$1+\frac{P_{(x)}+R_{k+1}^{0/00\cdot SA}SA_{k+1}+R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}>0$$

Finalmente el valor total será mayor a su propio incremento, es decir,

$$A_{(x+k+1)}\left\{1+\frac{P_{(x)}+R_{k+1}^{0/00\cdot SA}SA_{k+1}+R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}\right\}>\frac{P_{(x)}+R_{k+1}^{0/00\cdot SA}SA_{k+1}+R_{k+1}^{\%\pi}\pi}{d}>0$$

que es lo que se quería demostrar, es decir ${}_{k+1}\left(VR\right)_x>0;\quad\forall\quad k=0,1,2,\ldots$.

∇

Sin embargo, como ya se había precisado, al considerar recargos de tipo nivelado, el valor de rescate definido conforme a la expresión (34), siempre nos lleva a definir que el valor de rescate es la propia la reserva matemática más la prima anual sin recargos.

Por lo tanto, el análisis debe ir más allá y debe considerar su propia modelación actuarial basada en las variables aleatorias asociadas al pago de primas y de indemnización; es decir, al definir las variables aleatorias y la función de probabilidad asociada al tiempo de vida del individuo en estudio, es factible determinar la suficiencia del producto a la fecha de emisión y su valor correspondiente a cada año de valuación o cada instante dependiendo del tipo de variable aleatoria asociada a la edad de x.

Para este efecto, es importante considerar que el valor de rescate debe ser definido como una función de pérdida.

En las siguientes páginas se efectuará el análisis para la determinación de la expresión general del valor de rescate basado en el teorema del límite central y en forma alterna el modelo racional aplicable únicamente a esquemas de comisiones decrecientes que se deriva del modelo de reserva mínima.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES

En el caso práctico del sector asegurador, las variables aleatorias son de tipo discreto, ya que estas corresponden a las características asociadas y definida por la probabilidad de mortalidad a cada edad, arreglo al que se denomina tabla de mortalidad; en particular, para el sector asegurador mexicano del seguro de vida individual se tiene la *"Tabla de mortalidad Experiencia CNSF-2000 I"* y es común considerar en la modelación actuarial una tasa financiera de interés fija asociada al tiempo, simplificando con el ello el proceso de valor esperado de las variables aleatorias, ya sea de indemnización o de pagos de primas; sin embargo, esto no es limitativo y resultaría interesante modelar este proceso de tipo estocástico de dos variables aleatorias, es decir la propia tasa de interés y el valor del riesgo.

En la práctica del seguro, es muy común observar que el margen de seguridad (*que después se convertirá en el margen de utilidad para la empresa, si existe una buena selección de cartera*), considere en su modelación actuarial un simple valor porcentual aplicado a la prima neta única del seguro en cuestión, por lo que es necesario definir normas específicas, tendientes a determinar el nivel de suficiencia del seguro.

Los recargos por administración y adquisición, son conceptos que se deben basar en el *proceso especulativo* de mercado, por lo que un abuso de éstos, puede dejar a la compañía de seguros en desventaja con sus similares al establecerse por parte de ellas un precio más justo.

Bajo estas consideraciones, se debe cumplir los siguientes aspectos técnicos.

ASPECTOS TÉCNICOS

La prima neta única del seguro, deberá considerar un **margen de seguridad** para efecto de la modelación actuarial de la prima de tarifa, la cual deberá corresponder a *n*-veces la desviación estándar del valor esperado del riesgo asegurado. Este valor corresponde al nivel máximo que la compañía de seguros debe afronta y constituye la suficiencia del modelo; proceso que se podrá extrapolar a nivel cartera.

De las expresiones (1) a la (3) el **valor esperado** o prima neta única del seguro de vida es

$$PNU = E[Z] = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_{k/}q_x \tag{36}$$

al que denotaremos como μ_Z, con beneficio (b_{k+1}) unitario; $\forall \quad k = 0,1,2,...$

Consideremos ahora una cartera de $\Re$ pólizas, con edades $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_\Re$ y con variables aleatorias $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_\Re$, independiente e idénticamente distribuidas, es decir, todas tienen la misma función de probabilidad $\left({}_{k/}q_x\right)$; con media μ y varianza σ^2 finitas.

Por lo tanto, sea

$$\mu_Z = \mu_{Z_i} = E\left[Z_i\right]; \quad \forall\ i = 1,2,...,\Re \tag{37}$$

$$\sigma_Z^2 = Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(v^{k+1}\right)^2 {}_{k/}q_x - \left(\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k/}q_x\right)^2; \quad \forall i = 1,2,...,\Re \tag{38}$$

En virtud de que la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria Z_i depende del número de personas de edad (*x*) con vida a cada edad (*x*+*k*), definamos entonces al conjunto de pólizas $\Re$ como l_x y considerando el ***teorema del límite central*** para definir ahora la distribución de una nueva variable Z^*, como

$$Z^* = \frac{S - l_x\ \mu_Z}{\sigma_Z \sqrt{l_x}} \tag{39}$$

donde $S = \sum_{i=1}^{\Re = l_x} Z_i$ se aproxima a la de una variable normal tipificada $N(0,1)$, en virtud de que se tiene un suficiente número de expuestos tasados con la tabla de mortalidad y definidos en forma específica para las personas de edad (*x*), el resultado prueba que el estadístico o estimador media muestral $S_\Re = \frac{\sum_{i=1}^{\Re = l_x} Z_i}{l_x}$, se distribuye aproximadamente como una variable $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\Re}}\right)$, o de manera equivalente $\frac{S_\Re - \mu_Z}{\sigma_Z / \sqrt{\Re}}$ se distribuye aproximadamente como una variable aleatoria $N(0,1)$.

En otras palabras, $\Psi = \frac{S - \Re\ \mu_Z}{\sigma_Z \sqrt{\Re}}$, es la variable aleatoria tipificada $S_\Re$; la cual es normal asintóticamente con media 0 y varianza 1, normal estándar.

Al reordenar $\frac{S - \Re\ \mu_Z}{\sigma_Z \sqrt{\Re}}$, se tiene $\frac{S - \Re\ \mu_Z}{\sigma_Z \sqrt{\Re}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{\Re} Z_i}{\Re} - \mu_Z}{\sigma_Z \sqrt{\frac{\Re}{\Re^2}}} = \frac{S_\Re - \mu_Z}{\frac{\sigma_Z}{\sqrt{\Re}}}$ (40)

Por lo que se concluye que la media de $\Re = l_x$ variables aleatorias independientes, distribuidas en forma idéntica, estará distribuida de un modo aproximadamente normal, sin importar la distribución subyacente de cada variable, análisis que servirá de base para el estudio del concepto de valor de rescate.

Desde el punto de vista de la **suficiencia de la cartera**, la compañía de seguros deseará tener una cantidad de recursos M, tal que el valor de la variable aleatoria S, que es el valor de reclamaciones totales de la cartera, no lo sobrepase con una probabilidad de α, es decir, buscamos un monto M tal que $P(S \leq M) = \alpha$; al definir S como una suma de variables aleatorias y al considerar la virtud del ***Teorema del Límite Central***, nos permitirá calcular de forma aproximada este tipo de probabilidad.

Cabe destacar que con el planteamiento del problema, se cumple con las hipótesis que nos exige este teorema, es decir, el tiempo de vida de cada asegurado es independiente del tiempo de vida de los demás, su distribución de probabilística aunque puede ser distinta, cumple con tener la misma media y varianza; y la variable definida como el riesgo total, asumido por la compañía de seguros es una suma de variables aleatorias.

Por lo tanto, podemos encontrar este monto M como

$$P(S \leq M) = P\left(\sum_{i=1}^{\Re = l_x} Z_i \leq M \right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\Re} Z_i - E[\sum_{i=1}^{\Re} Z_i]}{\sqrt{Var\left[\sum_{i=1}^{\Re} Z_i\right]}} \leq \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right) \tag{41}$$

Dado que cada Z_i es independiente su varianza es

$$Var\left[\sum_{i=1}^{\Re} Z_i\right] = Var\left[Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\Re}\right] = \sum_{i=1}^{\Re} Var\left[Z_i\right]$$

Al aplicar y reordenar se obtiene

$$P(S \leq M) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{\Re} Z_i - \sum_{i=1}^{\Re} E[Z_i]}{\sum_{i=1}^{\Re} \sqrt{Var\left[Z_i\right]}} \leq \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right) = P\left(\frac{\frac{\sum_{i=1}^{\Re} Z_i}{\Re} - \frac{\Re \mu_Z}{\Re}}{\frac{\sigma_Z \sqrt{\Re}}{\Re}} \leq \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right)$$

$$= P\left(\frac{S_{\Re} - \mu_Z}{\frac{\sigma_Z}{\sqrt{\Re}}} \leq \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right) = P\left(\Psi \leq \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right) = P\left(\Psi \leq \Psi^{\alpha}\right) = \alpha$$

Donde Ψ es una variable aleatoria que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1, según el ***teorema del límite central*** y Ψ^{α} es el cuantíl que acumula α de probabilidad.

Se sigue que el valor de M se determina como

$$\begin{aligned} \Psi^{\alpha} &= \frac{M - E[S\ ]}{\pm\sqrt{Var(S)}} \\ \pm\Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)} &= M - E[S] \\ M &= E[S]\pm\Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)} \end{aligned} \tag{42}$$

Por lo tanto, sí consideramos un recargo (r) con una probabilidad de α de **confiabilidad** sobre la cartera de asegurados, se tiene

$$r = \Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)} \tag{43}$$

si distribuimos de manera uniforme este recargo entre todos los asegurados de la cartera de edad (x), tendremos que a cada uno le corresponde un **margen de seguridad** que fluctúa entre

$$MS_{k+1} = \pm\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_x}; \quad \forall \quad k = 0,1,2,3,4,\ldots 9,\ldots \tag{44}$$

por lo tanto, la prima neta única con un margen de seguridad de probabilidad α, es

$$E\left[Z\right]\pm\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_x}; \quad \forall \quad k = 0,1,2,3,4,\ldots 9,\ldots \tag{45}$$

Con objeto de aplicar la expresión anterior e ir estableciendo disposiciones relativas para la determinación del concepto de valor de rescate, consideremos el siguiente caso real con el mínimo de los requisitos que exige la normatividad respectiva.

> ***"Seguro de vida temporal a 10 años, emitido para una persona de edad 40 años, totalmente discreto, con suma asegurada de una unidad monetaria en moneda nacional y con pago de primas anuales igual a la duración del seguro".***

Por lo que respecta a la base biométrica y financiera para la modelación actuarial se considera la tabla de mortalidad *experiencia mexicana 91-98 individual o conocida como experiencia de mortalidad CNSF I* *Anexo B*, con tasa de interés anual fija del 5.5%.

Consideremos que la **confiabilidad** deseada es del 95% sobre la cartera en estudio.

Bajo estas condiciones, la prima neta única del seguro es del 32.37 ‰ (al millar) de suma asegurada, al considerar un 95% de **confiabilidad** sobre la cartera de pólizas definido para la cohorte a edad 40, es decir para l_{40}, se tiene un **margen de seguridad** de 2.55 ‰, al que se denotará como $\left(MS_{k+1}^{0/00 \cdot SA}\right)_{\forall\ k=0,1,\ldots,9}$; por lo tanto, la prima neta única con un 95% de confiabilidad, de acuerdo a la expresión (45) es del 34.92 ‰.

Para fines ilustrativos en el siguiente cuadro se muestra el detalle de cada uno de los conceptos involucrados en el proceso.

MARGEN DE SEGURIDAD DE LA PRIMA NETA UNICA

Edad (x)	40	lx	9646
Temporalidad (n)	10		

$E[Z] = A_{x:\overline{n}|}^{1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k/}q_x$ 0.03237 32.373 al millar

$E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} \cdot v^{k+1}\ {}_{k/}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_n p_x$

7.828534789

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(b_{k+1}\ v^{k+1}\right)^2 g_{K(x)}(k) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}\ v^{k+1} g_{K(x)}(k)\right)^2 = \quad 0.023180226$$

$$g_{K(x)}(k) = {}_{k/}q_x = {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

$E\left[Z^2\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\left(b_{k+1}\ v^{k+1}\right)^2 g_{K(x)}(k)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}\ v^{k+1} g_{K(x)}(k)$

Edad	Indicador k	v(k+1)	v 2(k+1)	$_kp_x$	q_{x+k}	2ª Momento	1o Momento
40	0	0.947867299	0.89845242	1	0.003166	0.00284450	0.003000948
41	1	0.898452416	0.80721674	0.996834	0.00341	0.002743894	0.003054023
42	2	0.851613664	0.72524583	0.9934348	0.003672	0.002645619	0.003106595
43	3	0.807216743	0.65159887	0.9897869	0.003954	0.002550109	0.003159138
44	4	0.765134354	0.58543058	0.98587329	0.004258	0.002457549	0.003211918
45	5	0.725245833	0.52598152	0.98167544	0.004585	0.002367433	0.003264318
46	6	0.687436809	0.47256937	0.97717446	0.004938	0.002280283	0.00331708
47	7	0.651598871	0.42458109	0.97234917	0.005317	0.002195076	0.003368753
48	8	0.617629261	0.3814659	0.96717919	0.005725	0.002112215	0.003419876
49	9	0.585430579	0.34272896	0.96164209	0.006164	0.002031547	0.003470176
50						**0.024228226**	**0.032372825**

$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{n=lx} Z_i\right] = l_x \cdot Var[Z] =$ 223.6062692

$\sqrt{\dfrac{Var(S)}{l_x}} =$ 0.001550157

$\sqrt{\dfrac{Var(Z)}{l_x}} = \dfrac{\sigma_Z}{\sqrt{l_x}} =$ 0.001550157

PRIMA NETA UNICA CON MARGEN DE SEGURIDAD

$\alpha\%$		Margen Seguridad		Inferior	Superior
95%	$\Psi^{\alpha\%}\dfrac{\sqrt{Var(S)}}{l_x}$	**0.002550** $\left(MS_{k+1}^{0/00 \cdot SA}\right)_{\forall\ k=0,1,\ldots,9}$	$E[Z] \pm \Psi^{\alpha\%}\dfrac{\sqrt{Var(S)}}{l_x} =$ $\Psi^{\alpha\%} =$ 1.645	0.02982	**0.03492**

Cuadro 1.

Definamos ahora $\left(P^{*}\right)$ como la prima neta nivelada respecto a $E\left[Z\right]^{*}$, donde éste representa el valor esperado de la variable aleatoria Z y su respectivo margen de seguridad, así bajo la conceptualización de la expresión (4) se tiene:

$$P^{*}\cdot E\left[Y\right]\approx E\left[Z\right]^{*}=E\left[Z\right]+\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}} \qquad (45.a)$$

La mejor aproximación la constituye la expresión $P^{*}\cdot\left\{E\left[Y\right]-\Psi^{(1-\alpha)}\frac{\sqrt{Var(S_{Y})}}{l_{x}}\right\}=E\left[Z\right]+\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}}$, donde S_{Y} debe seguir el mismo razonamiento definido para las expresiones (39) a la (45), sin embargo, $\Psi^{(1-\alpha)}\frac{\sqrt{Var(S_{Y})}}{l_{x}}$ tiene un valor insignificante, el índice superior $\left(1-\alpha\right)$ representa el complemento de la confiabilidad del modelo de suficiencia por falta de ingreso de primas, sobre la variable aleatoria Y.

De las expresiones (4) y (45.a), se tiene:

$$E\left[Y\right]=\frac{E\left[Z\right]}{P} \qquad (I)$$

$$E\left[Y\right]\approx\frac{E\left[Z\right]+\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}}}{P^{*}} \qquad (II)$$

Al igual (I) y (II), se tiene la relación entre P y P^{*}, es decir.

$$\frac{E\left[Z\right]}{P}\cong\frac{E\left[Z\right]+\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}}}{P^{*}}$$

$$P^{*}\cong P\left[1+\frac{\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}}}{E\left[Z\right]}\right] \qquad (45.b)$$

$$P^{*}\cong\frac{1+\frac{\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x}}}{E\left[Z\right]}}{\frac{1}{P}};\quad P,P^{*}>0$$

Con objeto de determinar la prima de tarifa, es necesario incluir al menos los recargos usuales y acostumbrados, tales como, gastos de adquisición y administración, en el primer caso, consideremos que estos son de tipo de decreciente y que deben cumplir con la condición indicada en la expresión (35).

Para el caso propuesto, consideremos conforme al estándar del mercado asegurador mexicano, los siguientes recargos por adquisición.

Año de vigencia del seguro	Gastos de adquisición decreciente
1º	35%
2º	15%
3º en adelante	6%

Respecta al gasto de administración, -*como ya se indicó*- en la práctica del seguro del vida tradicional son generalmente son nivelados durante todo el periodo de ingreso de primas.

Por otra parte, si el modelo de primas se basa en un sistema de pagos limitados, la compañía de seguros deberá constituir la provisión o reserva del gasto de administración conforme al procedimiento indicado en las expresiones (28) y (29).

Definamos así el siguiente gasto de administración para el caso propuesto.

Año de vigencia del seguro	Gastos de administración
Del 1º al 10º	15%

El considerar estos recargos, conforme a la ecuación de valor mostrada en la expresión (5) y redefinida ésta en su forma genérica, se tiene que

$$\pi E\left[Y\right]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} = P^{*}\cdot E\left[Y\right]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} + \pi\left\{ Gadm_{k+1}^{N,m}\cdot E\left[Y\right]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} + \left[Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\ldots m-1}\right]\right\} \tag{46}$$

por lo tanto, la prima de tarifa es

$$\pi = \frac{P^*}{1 - \left[Gadm_{k+1}^{N,m} + \frac{\left[Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\ldots m-1} \right]}{E\left[Y\right]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1}} \right]} \qquad (47)$$

donde m indica el número de pagos, en este caso es igual a la temporalidad *(n)* del seguro a *10,* (m=n=10) y las variables aleatoria $Y^{(\nabla)}$ e $Y^{(N)}$ representan el valor presente del conjunto de pago de primas anuales asociadas al tipo de gasto decreciente y nivelado respectivamente, los demás términos involucrados han sido definidos en el desarrollo de las expresiones (4), (5), (14) y (35).

Considerando las expresiones para la prima neta nivelada (4) y (45.b); y la información obtenida en cuadro (1), se sigue que las primas netas niveladas P y P^*, [4] son $4.14‰$ y $4.46‰$, respectivamente, el siguiente cuadro ilustra el detalle.

Edad (*x*)	40	*lx*	9646
Temporalidad (*n*)	10		

$E[Z] = A^1_{x:\overline{n}\rvert} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_{k/}q_x$	0.03237	32.373 al millar	$E[Y] = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} \cdot v^{k+1} \; {}_{k/}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}\rvert} \cdot {}_{n}p_x$
$P^* \cong P\left[1 + \frac{\Psi^{\alpha} \frac{\sqrt{Var(S)}}{l_x}}{E[Z]}\right]$	0.004460967	4.461 al millar	7.828534789
$\Psi^{95\%} \frac{\sqrt{Var(S)}}{l_x} =$	0.002550		$P = \frac{E[Z]}{E[Y]}$ 0.004135234
$\Psi^{95\%} =$	1.645		

Cuadro 2.

La prima de tarifa de acuerdo a la expresión (47) es $6.01‰$, es decir, para cada mil de suma asegurada, el contratante del seguro deberá pagar en forma anual al inicio de cada año póliza 6.01 unidades monetarias, el cuadro (3) muestra el detalle del proceso.

(4) P^* Incluye el efecto del margen de seguridad.

$$P^* \cong P\left[1+\frac{\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_x}}{E[Z]}\right]$$

Prima Neta Tarifa

Expresión General

$$\pi = \frac{P^*}{1-\left[Gadm_{k+1}^{N,m}+\frac{Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]}E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2}+Gadq_{k+1}^{N,[4,m]}E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\dots m-1}}{E[Y]_{K(x)=0,1,\dots,m-1}}\right]} =$$

0.006011327
6.01 al millar

$m \le n$

Gasto Adm definido por la Compañía	$Gadm_{k+1}^{N,m} =$	0.15
Gasto Adquisición Nivelado	$Gadq_{k+1}^{N,\,m\to n} =$	0.10791

Cuadro 3.

El gasto de gasto de adquisición decreciente se nivelo mediante el proceso definido en la expresión (35) y dada las característica del caso propuesto se obtuvo 10.79% aproximadamente para cada año de emisión.

Pago de Primas (m)	10
Temporalidad (n)	10

$$Gadq_{k+1}^{\substack{Nivelado \\ Cte\ \forall\ k=0,1,2,\dots,n-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{2} Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]}\cdot {}_kp_x\cdot v^k+\sum_{k=3}^{m-1} Gadq_{k+1}^{N,[4,m]}\cdot {}_kp_x\cdot v^k}{\sum_{k=3}^{m-1} {}_kp_x\cdot V^k};\quad m\to n \qquad 10.79\%$$

así

Año de vigencia del seguro	Gastos de adquisición	
	Decreciente	Nivelado
1º	35%	10.79%
2º	15%	10.79%
3º en adelante	6%	10.79%

Es obvio que al determinar el costo de la prima de tarifa bajo estos dos esquemas –*decreciente y nivelado*- su valor no varia, pero su importancia de establecerlo de esta forma -*nivelado*- radica en considerar otra opción de participación -*comisiones*- de la fuerza de venta y/o promotores en el producto, facilitando con ello en el registro de la nota técnica el proceso de suficiencia, es decir, la valuación actuarial de la reserva matemática se podrá efectuar bajo el modelo de reserva matemática pura o también llamada valuación de reserva de primas niveladas –*método prospectivo, retrospectivo, fackler*-, en virtud de que la anualidad de amortización (AM_k) definida en la expresión (19) bajo estas nuevas condiciones resulta ser nula.

En resumen, la prima de tarifa se obtuvo bajo un esquema de comisiones o gastos de adquisición de tipo decreciente y gastos de administración nivelados, ambos en forma porcentual. El margen se seguridad esta referido como valor de la prima neta única del seguro y corresponde a un valor al millar de suma asegurada.

En este orden de ideas resulta interesante el establecer ahora una ecuación de transformación para definir el margen seguridad como un valor porcentual de la prima de tarifa $\left(MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)}\right)$, para tal efecto consideremos la ecuación de valor genérica definida en la expresión (5) y dado las nuevas características redefinamos la expresión (46) como:

$$\begin{aligned}\pi E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} &= P\, E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} + \pi\Big\{Gadm_{k+1}^{N,m} \cdot E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} + \\ &MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)} \cdot E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1} + \\ &\left[Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\ldots m-1}\right]\Big\}\end{aligned} \tag{48}$$

P ahora es independiente del margen de seguridad, al despejar de la expresión π, se obtiene la prima de tarifa, donde la principal característica es involucrar todos sus recargos en forma nivelada y porcentual -*gastos de administración, adquisición y margen de seguridad*-, tal como se aprecia a continuación.

$$\pi = \frac{P}{1 - \left[Gadm_{k+1}^{N,m} + MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)} + \dfrac{Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\ldots m-1}}{E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1}}\right]} \tag{49}$$

Al igualar las expresiones (47) y (49), se obtiene que el margen de seguridad en forma porcentual es

$$MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)} = 1 - \left[\frac{P}{\pi} + Gadm_{k+1}^{N,m} + \frac{Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,\ldots m-1}}{E[Y]_{K(x)=0,1,\ldots,m-1}}\right] \tag{50}$$

Continuando con el caso práctico, al considerar la expresión (50) se tiene que el margen de seguridad definido como el 2.55 ‰, que representa el 95% de confiabilidad, puede permutarse por un valor porcentual del 5.42% de la prima de tarifa.

Resulta fácil verificar este último resultado, al aplicar en la expresión (49) los recargos nivelados $Gadm_{k+1}^{N,m} = 15\%$, $Gadq_{k+1}^{N,m\to n} = 10.79\%$ y $MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)} = 5.42\%$ se obtiene la prima de tarifa de 6.01‰, ya determina bajo el esquema de comisiones decreciente y mostrada en el cuadro (3).

La **ventaja** de establecer **valores porcentuales** permite el analizar en forma homogénea el flujo sobre el ingreso de primas de tarifa para cada año $k = 0,1,2,...$, en particular bajo el esquema de recargos nivelados la prima neta anual a cada año *k* es:

$$P = P_{k+1}^{N} = \pi\left[1-\left(Gadq_{k+1}^{N,m} + Gadm_{k+1}^{N,m} + MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)}\right)\right]; \quad \forall \quad k = 0,1,2,.. \tag{51}$$

donde

$$Gadq_{k+1}^{N,m} = \frac{Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,3]} E\left[Y^{(\nabla)}\right]_{K(x)=0,1,2} + Gadq_{k+1}^{N,[4,m]} E\left[Y^{(N)}\right]_{K(x)=3,4,...m-1}}{E\left[Y\right]_{K(x)=0,1,...,m-1}}$$

$$P = P_1^N = P_2^N = P_3^N = ... \quad \forall \quad k = 0,1,2,...$$

En el caso de esquemas de recargos decrecientes, la prima neta anual $\left(P_{k+1}^{\nabla}\right)$ para cada año (*k*+1) queda definida como

$$P_{k+1}^{\nabla} = \pi\left[1-\left(Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,m]} + Gadm_{k+1}^{N,m} + MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)}\right)\right]; \quad \forall \quad k = 0,1,2,.. \tag{52}$$

y con objeto de simplificar el proceso, definamos $R^{N}{}_{k+1}$ y $R^{\nabla}{}_{k+1}$, como los recargos nivelados y decrecientes, respectivamente de año (*k*+1), así

$$\begin{aligned} R^{N}{}_{k+1} &= Gadq_{k+1}^{N,m} + Gadm_{k+1}^{N,m} + MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)}; \quad \forall\ k = 0,1,2,... \\ R^{\nabla}{}_{k+1} &= Gadq_{k+1}^{\nabla,[1,m]} + Gadm_{k+1}^{N,m} + MS_{k+1}^{N,m}{}_{(\%)}; \quad \forall\ k = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{53}$$

Una consecuencia directa de los dos tipos de esquemas de recargos, aún cuando la prima de tarifa es la misma es la siguiente:

La prima neta anual de recargos decrecientes $\left(P_{k+1}^{\nabla}\right)$es menor en los dos primeros años a la prima neta anual de recargos nivelados$\left(P_{k+1}^{N}\right)$, es decir $P_{k+1}^{\nabla} < P_{k+1}^{N}; \quad k = 0,1$ (53.1)

Al considerar las condiciones establecidas en los artículos 182 y 184 de la Ley Sobre el Contrato de Seguro y al aplicar expresión (53), debe cumplirse siempre que el valor presente actuarial del valor absoluto de la diferencia entre los recargos $R^{N}{}_{k+1}$ y $R^{\nabla}{}_{k+1}$ de los tres primeros años de vigencia del seguro, es equivalente al valor presente actuarial del mismo concepto a partir del cuarto año de vigencia con fecha de valuación a la edad de emisión del seguro, concepto al que se le denominará *"**valor de recuperación**"*.

Entendiéndose que el proceso aplica cuando el número de pagos de primas anuales es mayor a tres y el producto esta determinado bajo el esquema de comisiones decrecientes.

Cuando el número de pago de primas anuales es menor o igual a tres su expresión será la que se indica en la expresión (67).

Sea
$$\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k=\sum_{k=3}^{n-1}Dif_{k+1}\ \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k \tag{54}$$

donde
$$\begin{gathered}Dif_{k+1}=R^{N}{}_{k+1}-R^{\nabla}{}_{k+1}=Gadq_{k+1}^{N,m}-Gadq_{k+1}^{\nabla,m}\\ m>3;\quad m\rightarrow n\end{gathered} \tag{55}$$

Del caso práctico al considerar la expresión (53) en las expresiones (51) y (52) , $\forall\quad k=0,1,2,...,9$. se tiene las siguientes primas anuales.

Año de Vigencia	Recargos $R^{N}{}_{k+1}$	$R^{\nabla}{}_{k+1}$	$P_{k+1}^{N}=P$	P_{k+1}^{∇}
1°	0.3121	0.55419	0.00414	0.00268
2°	0.3121	0.35419	0.00414	0.00388
3°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
4°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
5°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
6°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
7°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
8°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
9°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442
10°	0.3121	0.26419	0.00414	0.00442

Cuadro 4.

Cumpliéndose lo indicado en la expresión (53.1) , es decir las primas anuales del sistema decreciente son menores a las primas anuales del sistema nivelado en los dos primeros años.

El *“**valor de recuperación**”* de acuerdo a la expresión (54) es de 0.2391, como se muestra a continuación.

Edad	*Indicador k*	l_{x+k}	$Gadq^{\nabla,m}_{k+1}$	$Gadq^{\nabla}_{k+1}\cdot l_{x+k}\cdot v^{k}$	$l_{x+k}\cdot v^{k}$	$Gadq^{N,m}_{k+1}$	Dif_{k+1}
40	0	9646	**35.00%**	3376.25	9646.42	10.79%	**-24.21%**
41	1	9616	**15.00%**	1367.19	9114.58	10.79%	**-4.21%**
42	2	9583	**6.00%**	516.60	8609.95	10.79%	4.79%
43	3	9548	**6.00%**	487.87	8131.12	10.79%	4.79%
44	4	9510	**6.00%**	460.61	7676.75	10.79%	4.79%
45	5	9470	**6.00%**	434.73	7245.56	10.79%	4.79%
46	6	9426	**6.00%**	410.18	6836.34	10.79%	4.79%
47	7	9380	**6.00%**	386.88	6447.95	10.79%	4.79%
48	8	9330	**6.00%**	364.76	6079.30	10.79%	4.79%
49	9	9276	**6.00%**	343.76	5729.38	10.79%	4.79%
50	10	9219			5397.22		

Valor de recuperación

$\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{x+k}}{l_x}v^{k} =$ 0.239107 $\qquad \sum_{k=3}^{n-1}Dif_{k+1}\frac{l_{x+k}}{l_x}v^{k} =$ 0.239107

Cuadro 5.

Esta situación por faltante de recursos derivado del esquema de gastos de adquisición decreciente se ve superada cuando se aplica el procedimiento definido en las expresiones (14) a la (19), obteniendo la reserva matemática modificada mínima siempre mayor o igual a cero a partir del tercer año.

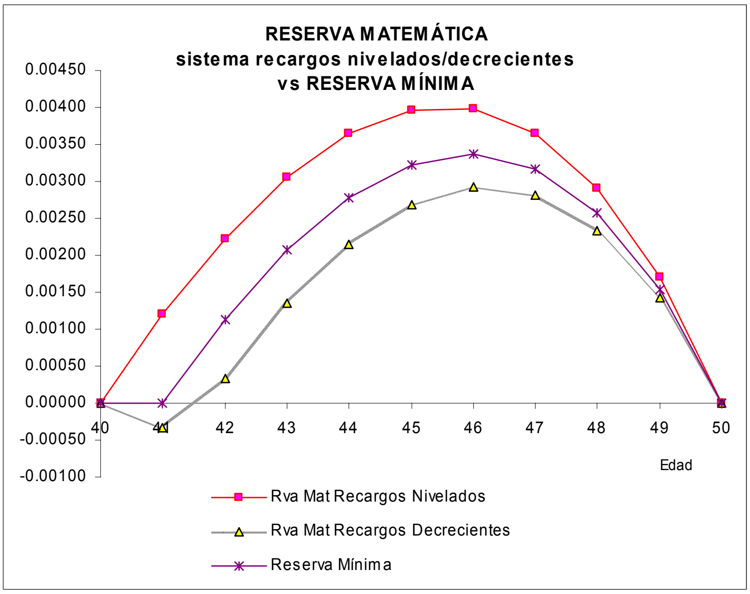
Modelo de Reserva Modificada Mínima vs Reserva de Prima Niveladas

PE_1	Pérdida Amortizable
0.001455	0.0011342864
PHA_1	Actualización
0.001134286	0.0012004728
	Cantidad de Amortización
	0.0001661098

Edad	*Indicador k*	*Rva Matemática (sistema nivelado de recargos)*	*Anualidad de Amortización*	$_kV^{min}$ *Reserva terminal (k) Mínima*
40	**0**	0.000000	0.00000	0.000000
41	**1**	0.001200	0.00120	0.000000
42	**2**	0.002227	0.00109	0.001132
43	**3**	0.003051	0.00098	0.002068
44	**4**	0.003642	0.00087	0.002776
45	**5**	0.003964	0.00074	0.003222
46	**6**	0.003978	0.00061	0.003368
47	**7**	0.003639	0.00047	0.003169
48	**8**	0.002900	0.00032	0.002578
49	**9**	0.001707	0.00017	0.001541
50	**10**	-	-	-

Cuadro 6.

Al considerar el caso práctico y suponiendo que la compañía define dos notas técnicas, una bajo el esquema de comisiones niveladas –*cuyos valores ya conocemos*- y otra bajo esquema de comisiones decrecientes, al valuar la reserva matemática bajo el proceso interactivo o de Fackler con $\left(P_{k+1}^{\nabla}\right)_{k=0,1,\ldots}$ y $\left(P=P_{k+1}^{N}\right)_{k=0,1,\ldots}$ que corresponda a cada año y comparada con la que resulta del modelo de reserva mínima –*proceso correcto*- se observa en todas ellas que el valor de la reserva matemática terminal o final del año 2 y años sucesivos son siempre positivas, tal como se puede apreciar cuadro (7).



Edad	*Indicador k*	${}_kV^{N}$	${}_kV^{\nabla}$	${}_kV^{min}$ *Reserva terminal (k) Mínima*
40	**0**	0.00000	0.00000	0.000000
41	**1**	0.00120	-0.00034	0.000000
42	**2**	0.00223	0.00033	0.001132
43	**3**	0.00305	0.00135	0.002068
44	**4**	0.00364	0.00214	0.002776
45	**5**	0.00396	0.00268	0.003222
46	**6**	0.00398	0.00292	0.003368
47	**7**	0.00364	0.00282	0.003169
48	**8**	0.00290	0.00234	0.002578
49	**9**	0.00171	0.00142	0.001541
50	**10**	0.00000	0.00000	0.000000

Cuadro (7)

Por lo tanto dadas las características del problema planteado, la reserva matemática al final del año 2 y subsecuentes se puede definir mediante la ***función de pérdida prospectiva*** $\left({}_kL^S\right)$.

$$ {}_kL^S = v^{J+1} - P_{k+1}^S \cdot \ddot{a}_{\overline{J+1}|}; \quad \forall\ k = 2,3,\ldots \tag{56} $$

Donde la variable aleatoria J es el ***tiempo futuro de vida truncado*** de $(x+k)$ con *función de probabilidad* ${}_jp_{x+k}\ q_{x+k+j}$; $j=0,1,2,3,\ldots$ y P_{k+1}^S; es la prima neta nivelada $\left(P_{k+1}^N = P\right)$ o decreciente $\left(P_{k+1}^{\nabla}\right)$ según corresponda.

En particular estas primas, P^{N}_{k+1} ó P^{∇}_{k+1}, son constantes a partir del inicio del tercer año de inicio de vigencia del seguro, detalle que se puede apreciar en el cuadro (4), para el caso que nos ocupa sus valores son 4.14‰ y 4.42‰, respectivamente.

Por lo tanto la reserva matemática al final del año 2 y subsecuentes, en forma genérica es el valor esperado de la función de pérdida $\left({}_{k}L^{S}\right)$, es decir

$$\begin{gathered} {}_{k}V^{S} = E\left[{}_{k}L^{S}\right] = A_{(x+k,n-k)} - P^{S}_{k+1}\ \ddot{a}_{(x+k,m-k)} \\ \forall\ k = 2,3,\ldots,m \to n,\ \ m,n \in \mathbb{Z}^{+} \qquad S = N \text{ ó } \nabla \end{gathered} \tag{57}$$

con varianza

$$\begin{aligned} Var\left[{}_{k}L^{S}\right] &= Var\left[v^{J+1}\left(1+\frac{P^{S}_{k+1}}{d}\right)\right] \\ &= \left[1+\frac{P^{S}_{k+1}}{d}\right]^{2} Var\left[v^{J+1}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

$$J = \lfloor T(x+k) \rfloor = 0,1,2,3,\ldots$$
$$\forall\ k = 2,3,\ldots\ ;\ j = 0,1,2,3,\ldots$$

donde:

$$\begin{aligned} Var\left[v^{J+1}\right] &= E\left[Z^{2}\right] - E\left[Z\right]^{2} \\ &= {}^{2}A_{(x+k,n-k)} - \left[A_{(x+k,n-k)}\right]^{2} \end{aligned} \tag{59}$$

$A_{(x+k,n-k)}$: Es el **primer momento** y corresponde a la forma genérica definida en la expresión (8) de un seguro emitido a edad (*x*+*k*) con temporalidad (*n*-*k*) años, con suma asegurada, SA_{k+j+1} alcanzada en el año *k*+*j*+1.

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1} v^{j+1}\ {}_{j}p_{x+k}\ q_{x+k+j} = \sum_{j=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1} v^{j+1}\ {}_{j|}q_{x+k}$$

$\forall\ k = 2,3,\ldots\ A_{(x+k,n-k)}$: primer momento (60)

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1} v^{j+1}\ {}_{j}p_{x+k}\ q_{x+k+j} = \sum_{j=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1} v^{j+1}\ {}_{j|}q_{x+k}$$

${}^{2}A_{(x+k,n-k)}$: **Segundo momento**

$$= \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1} v^{j+1}\right)^{2}\ {}_{j}p_{x+k}\ q_{x+k+j} = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1} v^{j+1}\right)^{2}\ {}_{j|}q_{x+k}$$

$\forall\ k = 2,3,\ldots$

De la expresión (57), la prima neta anual P_{k+1}^{S} involucró para su deducción el efecto del margen de seguridad obtenido al momento de la modelación del seguro en edad (*x*), definido como la variable aleatoria $Z = v^{k+1}$ y mostrada en la expresión (45), su tiempo asociado es $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$, $\forall\ k = 0,1,2,3,...$ de forma semejante, este aspecto debe también prevalecer en la expresión (56), para la variable aleatoria J situada para cada edad $(x+k)$.

Cuando *k*=0 y $P_{k+1}^{S} = P$, es el caso particular de la expresión (4), es decir, ${}_{k=0}V^{S} = E\left[{}_{k=0}L^{S}\right] = E[Z] - P\ E[Y]$.

Dadas las condiciones anteriores y considerando el flujo natural de primas P_{k+1}^{N} ó P_{k+1}^{∇} bajo el proceso del método de *Fackler*, se espera que la prima neta anual $\left(P_{k+1}^{S}\right)_{k=2,3,...}$ a partir del tercer año de vigencia del seguro, mantenga el mismo nivel de confiabilidad establecido al inicio de la contratación del mismo.

De la expresión (56) se puede observar que la variable aleatoria $\ddot{a}_{\overline{J+1}|}$ puede ser sustituida por $\dfrac{1-v^{j+1}}{d}$, a efecto de definir ésta en términos de la prima neta única $Z = v^{j+1}$, donde *J* es la variable aleatoria del tiempo futuro asociado en la edad (*x*+*k*) por años cumplidos, es decir, $J(x+k) = \lfloor T(x+k) \rfloor$.

Así $\ddot{a}_{\overline{J+1}|} = \dfrac{1-Z}{d}$ y estará asociada a la función de probabilidad ${}_{j}p_{x+k}\ q_{x+k+j}$; $\forall\ j = 0,1,2,3,...$ y $k = 2,3,...$ y siguiendo un proceso semejante al definido para la obtención de la expresión (45), definamos una cartera de $\Re$ pólizas, con edades $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{\Re}$, con variables aleatorias ${}_{k}L_{1}^{S}$, ${}_{k}L_{2}^{S}$, ${}_{k}L_{3}^{S}$,..., ${}_{k}L_{\Re}^{S}$, independiente e idénticamente distribuidas; es decir, todas tienen la misma función de probabilidad $\left({}_{j}p_{x+k}\ q_{x+k+j}\right)$; con media μ y varianza σ^2 finitas.

Por lo tanto su media es $\mu_{{}_{k}L^{S}} = \mu_{{}_{k}L_{i}^{S}} = E\left[{}_{k}L_{i}^{S}\right]$; $\forall\ i = 1,2,...,\Re$ y su varianza

$$\sigma^{2}_{{}_{k}L_{i}^{S}} = \left[1 + \frac{P_{k+1}^{S}}{d}\right]^{2} Var\left[v^{J+1}\right]; \quad \forall i = 1,2,...,\Re \qquad (61)$$

Al considerar los mismos argumentos para la obtención de las expresiones (39) y (40), definamos entonces ahora en forma dinámica para el conjunto de $\Re$ pólizas en un año *k* como la cartera de pólizas emitidas a edad l_{x+k} y consideremos el ***teorema del límite central*** para definir una nueva variable aleatoria Z^*, como $Z^* = \dfrac{S - l_{x+k}\ \mu_{{}_kL^S}}{\sigma_{{}_kL^S}\sqrt{l_{x+k}}}$, donde $S = \sum_{i=1}^{\Re = l_{x+k}} {}_kL_i^S$ se aproxima a la de una variable normal tipificada $N(0,1)$, siguiendo el mismo razonamiento usado en la expresión (40), podemos definir como $\Psi = \dfrac{S - \Re\ \mu_{{}_kL^S}}{\sigma_{{}_kL^S}\sqrt{\Re}}$, como la variable aleatoria tipificada $S_\Re$; la cual es normal asintóticamente con media 0 y varianza 1, es decir, normal estándar, al reordenar se tiene que

$$\Psi = \frac{S - \Re\mu_{{}_kL^S}}{\sigma_{{}_kL^S}\sqrt{\Re}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{\Re} {}_kL_i^S}{\Re} - \mu_{{}_kL^S}}{\sigma_{{}_kL^S}\sqrt{\dfrac{\Re}{\Re^2}}} = \frac{S_\Re - \mu_{{}_kL^S}}{\dfrac{\sigma_{{}_kL^S}}{\sqrt{\Re}}}$$

Por lo que se concluye que la media de $\Re = l_{x+k}$ variables aleatorias independientes, distribuidas en forma idéntica, estará distribuida de un modo aproximadamente normal para cada edad (*x*+*k*), sin importar la distribución subyacente de cada variable.

Desde el punto de vista de la suficiencia, la compañía de seguros deseará tener una cantidad de recursos M, en cada edad (*x*+*k*) tal que el valor de la variable aleatoria S, que es el **valor de seguridad y permanencia** total de la cartera no lo sobrepase con una probabilidad de α, es decir, buscamos un monto M tal que $P(S \le M) = \alpha$, este valor α debe ser el mismo al establecido en el año *k*=0, al definir S como una suma de variables aleatorias y al considerar la virtud del ***Teorema del Límite Central***, nos permitirá calcular de forma aproximada este tipo de probabilidad, y siguiendo un proceso semejante para la expresión (41), se tiene.

$$P(S \le M) = P\left(\sum_{i=1}^{\Re = l_x} {}_kL_i^S \le M \right) = P\left(\frac{s_\Re - \mu_{{}_kL^S}}{\dfrac{\sigma_{{}_kL^S}}{\sqrt{\Re}}} \le \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right)$$

$$= P\left(\Psi \le \frac{M - E[S]}{\sqrt{Var(S)}} \right) = P\left(\Psi \le \Psi^\alpha \right) = \alpha$$

Donde Ψ es una variable aleatoria que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1, según el ***teorema del límite central,*** Ψ^{α} es el cuantíl que acumula α de probabilidad, por lo que sigue que el valor de *M* se determina como

$$\Psi^{\alpha}=\frac{M-E[S\ ]}{\pm\sqrt{Var(S)}}$$

$$\pm\Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)}=M-E[S]$$

$$M=E[S]\pm\Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)}$$

Sí consideramos un recargo (r) con una probabilidad de α de **confiabilidad** sobre la cartera $\Re=l_{x+k}$ *-asegurados-*, se tiene:

$$r=\Psi^{\alpha}\cdot\sqrt{Var(S)}$$

Al distribuir de manera uniforme *r* entre todos los asegurados de la cartera de edad (*x*+*k*), con *k*=2,3,.., tendremos que a cada uno le corresponde un **valor de seguridad y permanencia** $\left[VSP_{k+1k=2,3,...}\right]$ que fluctúa entre

$$VSP_{k+1}=\pm\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{Var(S)}}{l_{x+k}};\quad\forall\quad k=2,3,4,...9,... \tag{62}$$

donde

$$Var(S)=Var\left[\sum_{i=1}^{\Re=l_{x+k}}{}_kL_i^S\right]=\sum_{i=1}^{\Re=l_{x+k}}Var\left[{}_kL_i^S\right]=l_{x+k}\ Var\left[{}_kL^S\right]=l_{x+k}\ \sigma^2_{{}_kL^S} \tag{63}$$

Al considerar la expresión (61) para cualquier individuo *i* con edad *x*+*k* en la expresión (63), se tiene que

$$Var(S)=\left[1+\frac{P_{k+1}^S}{d}\right]^2 l_{x+k}\ Var\left[v^{J+1}\right]$$

Variables aleatorias independientes

$$Var\left[\sum_{i=1}^{\Re=l_{x+k}}{}_kL_i^S\right]=\sum_{i=1}^{\Re=l_{x+k}}Var\left[{}_kL_i^S\right]=l_{x+k}Var\left[{}_kL^S\right]$$

$${}_kL^S=v^{J+1}-P_{k+1}^S\cdot\ddot{a}_{\overline{J+1|}};\quad\forall\ k=2,3,...$$

$$\sigma^2_{{}_kL_i^S}=\left[1+\frac{P_{k+1}^S}{d}\right]^2 Var\left[v^{J+1}\right];\quad\forall i=1,2,...,\Re$$

Esta última expresión al ser considerada en la expresión (62), nos permite definir que el **valor de seguridad y permanencia** se defina como

$$
\begin{aligned}
VSP_{k+1} &= \pm\Psi^{\alpha}\frac{\sqrt{\left[1+\frac{P_{k+1}^{S}}{d}\right]^{2} l_{x+k}\ Var\left[v^{J+1}\right]}}{l_{x+k}} \\
&= \pm\Psi^{\alpha}\left[1+\frac{P_{k+1}^{S}}{d}\right]\sqrt{\frac{l_{x+k}\ Var\left[v^{J+1}\right]}{\left(l_{x+k}\right)^{2}}} \\
&= \pm\Psi^{\alpha}\left[1+\frac{P_{k+1}^{S}}{d}\right]\sqrt{\frac{Var\left[v^{J+1}\right]}{l_{x+k}}}; \qquad \forall \quad k=2,3,4,\ldots 9,\ldots
\end{aligned} \tag{64}
$$

Por lo tanto, es deseable que la reserva matemática se constituya para cada año *k* como $\mu_{{}_kL^S}$ más *n*-veces la desviación estándar que se obtenga de la variable aleatoria ${}_kL_i^S$, con el mismo nivel de confianza definido para el margen de seguridad en el año *k*=0

En particular, al inicio de cada año (*k*+1), con *k*=2,3,…9.., se tiene la reserva matemática terminal del año *k*, definida como ${}_kV^S=\mu_{{}_kL^S}=E\left[{}_kL^S\right]$más la prima neta anual inicial $\left(P_{k+1}^S\right)$.

En ese momento la compañía deseará tener un **valor de seguridad y permanencia**, por lo tanto el recurso constituido al inicio del tercer año y años subsecuentes para productos de vida con temporalidad mayor o igual a diez años es $\mu_{{}_kL^S}+P_{k+1}^S$ con *k*=2,3,…9… y al considerar el **valor de seguridad y permanencia** se tiene.

$$\mu_{{}_kL^S}+P_{k+1}^S+\left|VSP_{k+1}\right|={}_kV^S+P_{k+1}^S+\left|VSP_{k+1}\right| \tag{65}$$

Pero en el caso de que el asegurado requiera disponer del recurso constituido una vez que haya ingresado al menos la tercera prima anual, representará para la empresa una pérdida y para el asegurado un valor de rescate $\left({}_{k+1}^{inicio}VR^S\right)$, en esa virtud el **valor de seguridad y permanencia tiene un efecto contrario**, es decir, a la empresa le representa un "***error*** " con un valor $(1-\alpha)$de probabilidad de permanencia de la cartera de asegurados, con esta interpretación y considerando las expresiones (64) y (65) se tiene que el valor de rescate a partir del tercer año de vigencia del seguro es:

$${}_{k+1}^{inicio}VR^S={}_kV^S+P_{k+1}^S-\left\{\Psi^{\alpha}\left[1+\frac{P_{k+1}^S}{d}\right]\sqrt{\frac{Var\left[v^{J+1}\right]}{l_{x+k}}}\right\};\ S=\nabla\ \acute{o}\ N;\quad k=2,3,\ldots,9,\ldots \tag{66}$$

El resultado de aplicar la expresión (66) de acuerdo con las condiciones definidas en caso práctico, otorgará un valor de rescate al inicio del tercer año de vigencia del seguro de 2.02 ‰, una vez que ingresa la prima anual descontada de los recargos de ese año.

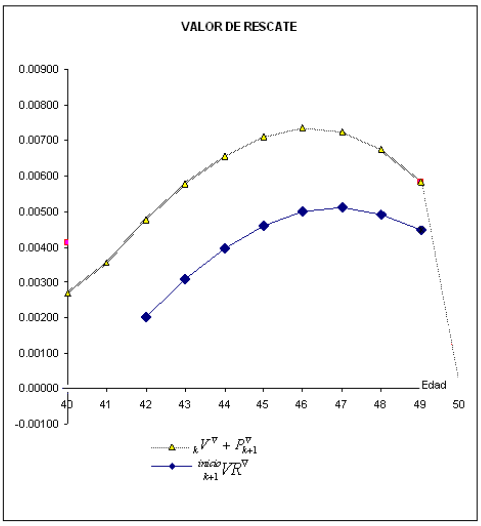
En el cuadro (8) se muestra el detalle del valor de rescate para cada uno de los años de inicio de vigencia del seguro y en la gráfica (11) su comportamiento en el tiempo.

Edad (x)	*Indicador* k	$\pm\Psi^{\alpha}\left[1+\frac{P^{\nabla}_{k+1}}{d}\right]\sqrt{\frac{Var\left(v^{J+1}\right)}{l_{x+k}}}$	${}_kV^{\nabla}$	P^{∇}_{k+1}	${}^{inicio}_{k+1}VR^{\nabla}$ **Valor de Rescate**	*Vigencia del Seguro (k+1)*
40	0	0.002681	0.000000	0.002680		1º
41	1	0.002728	-0.000340	0.003882		2º
42	**2**	**0.002727**	**0.000328**	**0.004423**	**0.002025**	**3º**
43	**3**	**0.002679**	**0.001346**	**0.004423**	**0.003090**	**4º**
44	**4**	**0.002607**	**0.002141**	**0.004423**	**0.003957**	**5º**
45	**5**	**0.002502**	**0.002679**	**0.004423**	**0.004600**	**6º**
46	**6**	**0.002354**	**0.002921**	**0.004423**	**0.004990**	**7º**
47	**7**	**0.002146**	**0.002824**	**0.004423**	**0.005101**	**8º**
48	**8**	**0.001845**	**0.002341**	**0.004423**	**0.004919**	**9º**
49	**9**	**0.001375**	**0.001419**	**0.004423**	**0.004468**	**10º**
50	10					

Edad (x)	*Indicador* k	$\left[1+\frac{P^{\nabla}_{k+1}}{d}\right]^2$	$Var\left[v^{J+1}\right]$	$\sigma^2_{{}_kL^{\nabla}}$	l_{x+k}	$Var(S)=l_{x+k}\ \sigma^2_{{}_kL^{\nabla}}$
40	0	1.105454	0.023180	0.025625	9646	247.1866
41	1	1.154481	0.022910	0.026449	9616	254.3307
42	**2**	**1.176889**	**0.022375**	**0.026332**	**9583**	**252.3468**
43	**3**	**1.176889**	**0.021523**	**0.025330**	**9548**	**241.8478**
44	**4**	**1.176889**	**0.020293**	**0.023883**	**9510**	**227.1300**
45	**5**	**1.176889**	**0.018614**	**0.021907**	**9470**	**207.4511**
46	**6**	**1.176889**	**0.016403**	**0.019304**	**9426**	**181.9640**
47	**7**	**1.176889**	**0.013559**	**0.015958**	**9380**	**149.6809**
48	**8**	**1.176889**	**0.009971**	**0.011735**	**9330**	**109.4866**
49	**9**	**1.176889**	**0.005504**	**0.006478**	**9276**	**60.0880**
50	10					

Cuadro (8)

Sistema de Comisiones Decrecientes



Gráfica 11

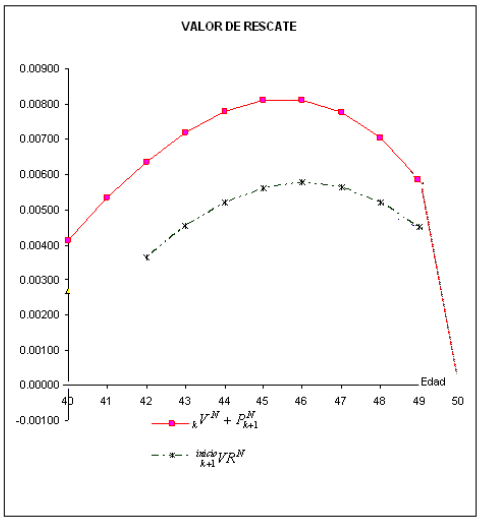
Permutando el esquema de comisiones decrecientes a un esquema de comisiones niveladas bajo el proceso analizado y definidos en las expresiones (35) y (50), se obtiene en forma semejante los valores de rescate al inicio de cada año póliza y su comportamiento gráfico tal como se muestra en el cuadro (9) y gráfica (12), respectivamente.

Edad (x)	*Indicador* k	$\pm\Psi^{\alpha}\left[1+\frac{P_{k+1}^{N}}{d}\right]\sqrt{\frac{Var\left(v^{J+1}\right)}{l_{x+k}}}$	${}_{k}V^{N}$	$P=P_{k+1}$	${}_{k+1}^{inicio}VR^{N}$ **Valor de Rescate**	*Vigencia del Seguro (k+1)*
40	0	0.002752	0.00000	0.004135		1°
41	1	0.002741	0.00120	0.004135		2°
42	2	0.002713	0.00223	0.004135	0.003649	3°
43	3	0.002666	0.00305	0.004135	0.004521	4°
44	4	0.002594	0.00364	0.004135	0.005184	5°
45	5	0.002489	0.00396	0.004135	0.005610	6°
46	6	0.002342	0.00398	0.004135	0.005771	7°
47	7	0.002135	0.00364	0.004135	0.005640	8°
48	8	0.001836	0.00290	0.004135	0.005200	9°
49	9	0.001368	0.00171	0.004135	0.004475	10°
50	10					

Edad	*Indicador* k	$\left[1+\frac{P}{d}\right]^{2}$	$Var\left[v^{J+1}\right]$	$\sigma^{2}_{{}_{k}L^{N}}$	l_{x+k}	$Var\left(S\right)=l_{x+k}\ \sigma^{2}_{{}_{k}L^{N}}$
40	0	1.164934	0.023180	0.027003	9646	260.4867
41	1	1.164934	0.022910	0.026689	9616	256.6337
42	2	1.164934	0.022375	0.026065	9583	249.7834
43	3	1.164934	0.021523	0.025073	9548	239.3911
44	4	1.164934	0.020293	0.023640	9510	224.8228
45	5	1.164934	0.018614	0.021684	9470	205.3438
46	6	1.164934	0.016403	0.019108	9426	180.1156
47	7	1.164934	0.013559	0.015796	9380	148.1604
48	8	1.164934	0.009971	0.011616	9330	108.3745
49	9	1.164934	0.005504	0.006412	9276	59.4776
50	10					

Cuadro (9)

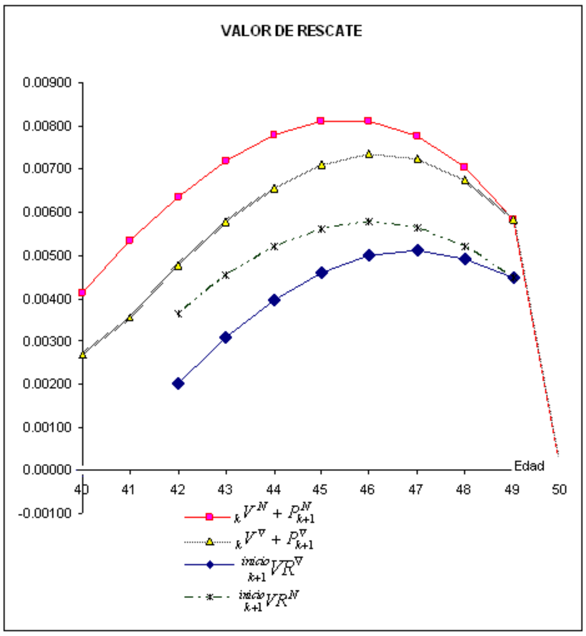
Sistema de Comisiones Niveladas



Gráfica 12

Los detalles de los cuadros (8) y (9) se muestran en el anexo A.

En forma compasiva la siguiente gráfica muestra el comportamiento del valor de rescate bajo los dos esquemas de comisiones,



Gráfica 13

En el caso de los seguro de vida bajo el esquema de comisiones decrecientes con pago de primas anuales sea menor o igual a tres, el "***año límite de equilibrio***" se debe determinar como

$$\sum_{t=0}^{m^*} \frac{\left|Dif_{k+1}\right|}{12} \frac{l_{x+\frac{t}{12}}}{l_x} v^{\frac{t}{12}} = \sum_{s=m^*+1}^{12\,l} \frac{Dif_{k+1}}{12} \frac{l_{x+\frac{t}{12}}}{l_{40}} v^{\frac{t}{12}} \qquad (67)$$

Donde m^* es el mes de equilibrio, l el número de pago de primas anuales $l \in (1,3]$ y $l \in \mathrm{Z}^+$, el doceavo es la unidad mínima de la fracción de la prima anual de ingreso en el periodo, k=0,1,2,…. situación que obliga a determinar un valor de rescate ponderada entre dos edades enteras.

En el caso del pago del seguro a prima única, el valor de rescate es inmediato y el proceso a seguir es semejante a la expresión (66).

$${}^{inicio}_{k+1}VR^S = \begin{cases} {}_0V^S + A_{(x,n)} - \left\{ \Psi^\alpha \sqrt{\dfrac{Var\left[v^{J+1}\right]}{l_x}} \right\} & k = 0 \\ & S = \nabla \text{ ó } N \\ {}_kV^S - \left\{ \Psi^\alpha \sqrt{\dfrac{Var\left[v^{J+1}\right]}{l_{x+k}}} \right\} & k = 1,2,3,\ldots,9,\ldots \end{cases} \qquad (68)$$

Situación que resulta absurda en la práctica para la primera expresión, es decir, ingresa su prima única para luego optar por rescatar el recurso constituido en la reserva matemática.

Una propuesta alternativa exclusivo del esquema de comisiones decrecientes, basada en un proceso racional del modelo de reserva mínima con pago de primas anuales mayor a tres y del concepto "***valor de recuperación***" descrito en la expresión (54), consiste en redistribuir actuarialmente este valor en los siguientes años, expresión (69), previa actualización al año tres, expresión (68), donde el asegurado podrá hacer uso del recurso constituido conforme a los preceptos definidos en los artículos 182 y 184 de la Ley Sobre el Contrato del Seguro.

$$\left[\sum_{k=0}^{2} \left|Dif_{k+1}\right| \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right] \frac{1}{{}_3E_x} \tag{68}$$

$$\frac{\left[\sum_{k=0}^{2} \left|Dif_{k+1}\right| \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right] \frac{1}{{}_3E_x}}{\ddot{a}_{x+3:\overline{m-3|}}} \tag{69}$$

De la expresión anterior, *m:* representa el número de pago de primas anuales, por lo tanto esta porción y las subsecuentes en caso de cancelación deberán ser reconocidas como parte del descuento por recargos no incurridos por el asegurado.

El reconocimiento de estas cantidades definidas en la expresión (69) para el caso de cancelación del seguro a partir del inicio de un año específico *k*=2,3,…, sobre la prima de tarifa es.

$$\overset{inicio}{R}_{x+k+1} = \frac{\left[\sum_{k=0}^{2} \left|Dif_{k+1}\right| \frac{l_{x+k}}{l_x}\ v^k\right] \frac{1}{{}_3E_x}}{\ddot{a}_{x+3:\overline{m-3|}}}\ \ddot{a}_{x+(k+1):\overline{m-(k+1)|}} \tag{70}$$

El valor de rescate bajo estas consideraciones, una vez que ingresa la tercera prima anual o subsecuentes, deberá descontársele el "***valor de recuperación***" faltante por ingreso de primas, para quedar como

$$\boxed{{}^{inicio}_{k+1}VR^{\nabla} = {}_kV^{\nabla} + P^{\nabla}_{k+1} - \overset{inicio}{R}_{x+k} \cdot \pi_{k+1}; \quad k = 2,3,...,9,... \tag{71}}$$

De acuerdo a las condiciones del problema propuesto su "***valor de recuperación***" es de 0.2390107 como se indicó en el cuadro (5)

$$\sum_{k=0}^{2} \left|Dif_{k+1}\right| \frac{l_{40+k}}{l_{40}}\ v^k = \sum_{k=3}^{9} Dif_{k+1}\ \frac{l_{40+k}}{l_{40}}\ v^k = 0.239107$$

En forma general, cuando el asegurado haya cubierta al menos la tercera prima anual, podrá cancelar el seguro y disponer de una parte del recurso constituido de acuerdo al precepto de ley, para lograr este objetivo, será necesario previamente reconocer el efecto del "***valor de recuperación***" actualizado al "***año límite de equilibrio***" , bajo el siguiente proceso.

$$\left[\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{40+k}}{l_{40}}\ v^{k}\right]\frac{1}{{}_{3}E_{40}}=0.3851$$

Cantidad que deberá ser recuperada en los años subsecuentes de ingreso de primas, es decir esta cantidad anual corresponde a

$$\frac{\left[\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{40+k}}{l_{40}}\ v^{k}\right]\frac{1}{{}_{3}E_{40}}}{\ddot{a}_{43:\overline{7}|}}=0.0650$$

En el siguiente cuadro se muestra el detalle de proceso aplicable conforme a la expresión (71).

Edad (x)	*Indicador k*	${}_{k}V^{\nabla}+P^{\nabla}_{k+1}$	$Dif_{k+1}\frac{l_{x+k}}{l_x}v^{k}$	$\ddot{a}_{x+(k+1):\overline{m-(k+1)}|}$	$\overset{inicio}{R}_{x+k+1}$	$\overset{inicio}{R}_{x+k+1}\cdot\pi$	${}^{inicio}_{k+1}VR^{\nabla}$
40	0	0.002680	0.242093466	7.226984836			
41	1	0.003542	0.039772699	6.591947544			
42	2	0.004752	0.042759164	5.921247479	0.385121778	0.002315093	0.002436526
43	3	0.005769		5.212526420	0.339026100	0.002037997	0.003731119
44	4	0.006564		4.463219763	0.290290709	0.001745032	0.004819066
45	5	0.007102		3.670526213	0.238733406	0.001435105	0.005666641
46	6	0.007344		2.831386541	0.184155218	0.001107017	0.006236932
47	7	0.007247		1.942440758	0.126337607	0.000759457	0.006487570
48	8	0.006764		1.000000000	0.065040649	0.000390981	0.006373296
49	9	0.005843		0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.005842654
50	10	0.000000					

$$\left[\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{40+k}}{l_{40}}\ v^{k}\right]\frac{1}{{}_{3}E_{40}}=\quad 0.38512177802$$

$$\frac{1}{{}_{3}E_{x}}=\quad 1.186357761$$

$$\ddot{a}_{x+3:\overline{m-3}|}=\quad 5.921247479$$

$$\frac{\left[\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{x+k}}{l_{x}}\ v^{k}\right]\frac{1}{{}_{3}E_{x}}}{\ddot{a}_{x+3:\overline{m-3}|}}=\quad 0.065040649$$

$$\overset{inicio}{R}_{x+k+1}=\frac{\left[\sum_{k=0}^{2}\left|Dif_{k+1}\right|\frac{l_{x+k}}{l_{x}}\ v^{k}\right]\frac{1}{{}_{3}E_{x}}}{\ddot{a}_{x+3:\overline{m-3}|}}\ddot{a}_{x+(k+1):\overline{m-(k+1)}|}$$

$${}^{inicio}_{k+1}VR^{\nabla}={}_{k}V^{\nabla}+P^{\nabla}_{k+1}-\overset{inicio}{R}_{x+k}\cdot\pi_{k+1}$$
$$k=2,3,\ldots,9,..$$

Cuadro 10

En conclusión.

Al reproducir el proceso anterior bajo el esquema de comisiones niveladas el factor $\overset{inicio}{R}_{x+k}=0$ y en este caso el valor de rescate es la misma reserva matemática más la prima que ingresa-*sin recargos*-, por lo que se demuestra numéricamente que el proceso descrito en la expresión (34) no es factible como solución única bajo el proceso de comisiones niveladas, por lo que el modelo propuesto en la expresión (66) es la solución basada en la idea de suficiencia de la prima.

Anexo A

proceso para la determinación del valor de pérdida o compensación

k =1

Edad (*x+k*)	41	l_{x+k}	9616
Temporalidad (*n-k*)	9		
n=10			

$$E[Z] = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$$ 0.03109 | 31.086 al millar

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\, v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\, v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 = $$ 0.022909889

$$\boxed{Z = V^{J+1}}$$

$$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_{j}p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$$

$$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+1}\, v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) \qquad E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\, v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$$

Edad	*Indicador j*	*v(j+1)*	*v 2(j+1)*	$_{j}p_{x+k}$	q_{x+k+j}	*2ª Momento*	*1o Momento*
41	0	0.947867299	0.89845242	1	0.00341	0.00306372	0.003232227
42	1	0.898452416	0.80721674	0.99659	0.003672	0.002953992	0.003287867
43	2	0.851613664	0.72524583	0.992930522	0.003954	0.002847349	0.003343476
44	3	0.807216743	0.65159887	0.989004474	0.004258	0.002744001	0.003399336
45	4	0.765134354	0.58543058	0.984793293	0.004585	0.002643381	0.003454794
46	5	0.725245833	0.52598152	0.980278016	0.004938	0.002546073	0.003510634
47	6	0.687436809	0.47256937	0.975437403	0.005317	0.002450934	0.003565323
48	7	0.651598871	0.42458109	0.970251002	0.005725	0.002358415	0.003619428
49	8	0.617629261	0.3814659	0.964696315	0.006164	0.002268344	0.003672663
50						**0.02387621**	**0.031085748**

k =2

Edad (*x+k*)	42	l_{x+k}	9583
Temporalidad (*n-k*)	8		
n=10			

$$E[Z] = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$$ 0.02949 | 29.486 al millar

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\, v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\, v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 = $$ 0.022374659

$$\boxed{Z = V^{J+1}}$$

$$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_{j}p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$$

$$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+1}\, v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) \qquad E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\, v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$$

Edad	*Indicador j*	*v(j+1)*	*v 2(j+1)*	$_{j}p_{x+k}$	q_{x+k+j}	*2ª Momento*	*1o Momento*
42	0	0.947867299	0.89845242	1	0.003672	0.00329912	0.003480569
43	1	0.898452416	0.80721674	0.996328	0.003954	0.003180015	0.003539436
44	2	0.851613664	0.72524583	0.992388519	0.004258	0.003064592	0.00359857
45	3	0.807216743	0.65159887	0.988162929	0.004585	0.002952217	0.003657279
46	4	0.765134354	0.58543058	0.983632202	0.004938	0.002843539	0.003716392
47	5	0.725245833	0.52598152	0.978775026	0.005317	0.002737285	0.003774286
48	6	0.687436809	0.47256937	0.973570879	0.005725	0.002633957	0.003831562
49	7	0.651598871	0.42458109	0.967997186	0.006164	0.002533363	0.003887918
50						**0.02324408**	**0.029486011**

k=3

Edad ($x+k$)	43	l_{x+k}	9548
Temporalidad ($n-k$)	7		
n=10			

$$E\left[Z\right]=A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}=\sum_{j=0}^{n-1}v^{j+1}\cdot{}_{j/}q_{x+k}$$ 0.02754 27.537 al millar

VARIANZA

$$Var(Z)=\sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^{2}g_{J(x+k)}\left(j\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-k-1}SA_{k+j+1}\ v^{j+1}g_{J(x+k)}\left(j\right)\right)^{2}=$$ 0.021522784

$\boxed{Z=V^{J+1}}$

$$g_{J(x+k)}\left(k\right)={}_{j/}q_{x+k}={}_{j}p_{x+k}\cdot q_{x+k+j}$$

$E\left[Z^{2}\right]=\sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^{2}g_{J(x+k)}\left(j\right)$ $E\left[Z\right]=\sum_{k=0}^{n-k-1}SA_{k+1}\ v^{j+1}g_{J(x+k)}\left(j\right)$

Edad	*Indicador j*	*v(j+1)*	*v 2(j+1)*	*j p x+k*	*q x+k+j*	*2ª Momento*	*1o Momento*
43	0	0.947867299	0.89845242	1	0.003954	0.00355248	0.003747867
44	1	0.898452416	0.80721674	0.996046	0.004258	0.003423538	0.003810484
45	2	0.851613664	0.72524583	0.991804836	0.004585	0.003298001	0.003872649
46	3	0.807216743	0.65159887	0.987257411	0.004938	0.003176595	0.003935244
47	4	0.765134354	0.58543058	0.982382334	0.005317	0.003057895	0.003996547
48	5	0.725245833	0.52598152	0.977159007	0.005725	0.002942464	0.004057196
49	6	0.687436809	0.47256937	0.971564772	0.006164	0.002830088	0.00411687
50						**0.02228106**	**0.027536857**

k=4

Edad ($x+k$)	44	l_{x+k}	9510
Temporalidad ($n-k$)	6		
n=10			

$$E\left[Z\right]=A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|}=\sum_{j=0}^{n-1}v^{j+1}\cdot{}_{j/}q_{x+k}$$ 0.02520 25.197 al millar

VARIANZA

$$Var(Z)=\sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^{2}g_{J(x+k)}\left(j\right)-\left(\sum_{k=0}^{n-k-1}SA_{k+j+1}\ v^{j+1}g_{J(x+k)}\left(j\right)\right)^{2}=$$ 0.02029324

$\boxed{Z=V^{J+1}}$

$$g_{J(x+k)}\left(k\right)={}_{j/}q_{x+k}={}_{j}p_{x+k}\cdot q_{x+k+j}$$

$E\left[Z^{2}\right]=\sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^{2}g_{J(x+k)}\left(j\right)$ $E\left[Z\right]=\sum_{k=0}^{n-k-1}SA_{k+1}\ v^{j+1}g_{J(x+k)}\left(j\right)$

Edad	*Indicador j*	*v(j+1)*	*v 2(j+1)*	*j p x+k*	*q x+k+j*	*2ª Momento*	*1o Momento*
44	0	0.947867299	0.89845242	1	0.004258	0.00382561	0.004036019
45	1	0.898452416	0.80721674	0.995742	0.004585	0.00368533	0.004101864
46	2	0.851613664	0.72524583	0.991176523	0.004938	0.003549665	0.004168163
47	3	0.807216743	0.65159887	0.986282093	0.005317	0.003417025	0.004233095
48	4	0.765134354	0.58543058	0.981038031	0.005725	0.003288037	0.004297333
49	5	0.725245833	0.52598152	0.975421589	0.006164	0.003162463	0.00436054
50						**0.02092813**	**0.025197013**

k =5

Edad (*x*+*k*)	45	l_{x+k}	9470
Temporalidad (*n*-*k*)	5		
n=10			

$E[Z] = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$ 0.02242 22.420 al millar

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 =$$ 0.018614261

$\boxed{Z = V^{J+1}}$

$$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_{j}p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$$

$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$

Edad	Indicador j	v(j+1)	v 2(j+1)	$_jp_{x+k}$	q_{x+k+j}	2ª Momento	1o Momento
45	0	0.947867299	0.89845242	1	0.004585	0.00411940	0.004345972
46	1	0.898452416	0.80721674	0.995415	0.004938	0.00396776	0.004416216
47	2	0.851613664	0.72524583	0.990499641	0.005317	0.003819497	0.004485012
48	3	0.807216743	0.65159887	0.985233154	0.005725	0.003675317	0.004553074
49	4	0.765134354	0.58543058	0.979592694	0.006164	0.003534952	0.004620041
50						**0.01911693**	**0.022420315**

k =6

Edad (*x*+*k*)	46	l_{x+k}	9426
Temporalidad (*n*-*k*)	4		
n=10			

$E[Z] = A^{1}_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$ 0.01916 19.156 al millar

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 =$$ 0.016402549

$\boxed{Z = V^{J+1}}$

$$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_{j}p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$$

$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1}\left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$

Edad	Indicador j	v(j+1)	v 2(j+1)	$_jp_{x+k}$	q_{x+k+j}	2ª Momento	1o Momento
46	0	0.947867299	0.89845242	1	0.004938	0.00443656	0.004680569
47	1	0.898452416	0.80721674	0.995062	0.005317	0.004270778	0.004753482
48	2	0.851613664	0.72524583	0.989771255	0.005725	0.004109562	0.004825618
49	3	0.807216743	0.65159887	0.984104815	0.006164	0.003952613	0.004896595
50						**0.01676951**	**0.019156264**

k=7

Edad (x+k)	47	l_{x+k}	9380
Temporalidad (n-k)	3		
n=10			

$E[Z] = A^1_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$ 0.01535 **15.348 al millar**

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 =$$ 0.013559455

$\boxed{Z = V^{J+1}}$

$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_j p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$

$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$

Edad	Indicador j	v(j+1)	v 2(j+1)	$_jp_{x+k}$	q_{x+k+j}	2ª Momento	1o Momento
47	0	0.947867299	0.89845242	1	0.005317	0.00477707	0.00503981
48	1	0.898452416	0.80721674	0.994683	0.005725	0.004596744	0.005116291
49	2	0.851613664	0.72524583	0.98898844	0.006164	0.004421189	0.005191543
50						**0.01379500**	**0.015347645**

k=8

Edad (x+k)	48	l_{x+k}	9330
Temporalidad (n-k)	2		
n=10			

$E[Z] = A^1_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$ 0.01093 **10.933 al millar**

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 =$$ 0.00997131

$\boxed{Z = V^{J+1}}$

$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_j p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$

$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$

Edad	Indicador j	v(j+1)	v 2(j+1)	$_jp_{x+k}$	q_{x+k+j}	2ª Momento	1o Momento
48	0	0.947867299	0.89845242	1	0.005725	0.00514364	0.00542654
49	1	0.898452416	0.80721674	0.994275	0.006164	0.004947198	0.005506355
50						**0.01009084**	**0.010932896**

k=9

Edad (x+k)	49	l_{x+k}	9276
Temporalidad (n-k)	1		
n=10			

$E[Z] = A^1_{x+k:\overline{n-k}|} = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot {}_{j/}q_{x+k}$ 0.00584 **5.843 al millar**

VARIANZA

$$Var(Z) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+j+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j) - \left(\sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+j+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)\right)^2 =$$ 0.005503924

$\boxed{Z = V^{J+1}}$

$g_{J(x+k)}(k) = {}_{j/}q_{x+k} = {}_j p_{x+k} \cdot q_{x+k+j}$

$E[Z^2] = \sum_{j=0}^{n-k-1} \left(SA_{k+1}\ v^{j+1}\right)^2 g_{J(x+k)}(j)$ $E[Z] = \sum_{k=0}^{n-k-1} SA_{k+1}\ v^{j+1} g_{J(x+k)}(j)$

Edad	Indicador j	v(j+1)	v 2(j+1)	$_jp_{x+k}$	q_{x+k+j}	2ª Momento	1o Momento
49	0	0.947867299	0.89845242	1	0.006164	0.00553806	0.005842654
50						**0.00553806**	**0.005842654**

Anexo B.

Tasa Interés	5.50%

Tasas de Mortalidad Individual CNSF 2000-I (1991-1998)

Edad	q_x	p_x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
12	0.000396	0.999604	10,000.000	3.960	5259.8152	95589.3339	1.9743	276.4850
13	0.000427	0.999573	9,996.040	4.268	4983.6325	90329.5187	2.0171	274.5107
14	0.000460	0.999540	9,991.772	4.596	4721.8052	85345.8862	2.0588	272.4936
15	0.000495	0.999505	9,987.175	4.944	4473.5860	80624.0810	2.0990	270.4348
16	0.000533	0.999467	9,982.232	5.321	4238.2669	76150.4951	2.1412	268.3358
17	0.000575	0.999425	9,976.911	5.737	4015.1733	71912.2282	2.1884	266.1946
18	0.000619	0.999381	9,971.175	6.172	3803.6631	67897.0549	2.2317	264.0062
19	0.000667	0.999333	9,965.002	6.647	3603.1362	64093.3918	2.2780	261.7745
20	0.000718	0.999282	9,958.356	7.150	3413.0169	60490.2556	2.3228	259.4965
21	0.000773	0.999227	9,951.206	7.692	3232.7644	57077.2387	2.3687	257.1737
22	0.000833	0.999167	9,943.513	8.283	3061.8630	53844.4743	2.4176	254.8051
23	0.000897	0.999103	9,935.230	8.912	2899.8222	50782.6113	2.4655	252.3875
24	0.000966	0.999034	9,926.319	9.589	2746.1811	47882.7891	2.5145	249.9220
25	0.001041	0.998959	9,916.730	10.323	2600.5008	45136.6080	2.5660	247.4075
26	0.001121	0.998879	9,906.406	11.105	2462.3636	42536.1072	2.6164	244.8415
27	0.001207	0.998793	9,895.301	11.944	2331.3776	40073.7436	2.6673	242.2251
28	0.001300	0.998700	9,883.358	12.848	2207.1693	37742.3660	2.7197	239.5578
29	0.001400	0.998600	9,870.509	13.819	2089.3838	35535.1968	2.7726	236.8380
30	0.001508	0.998492	9,856.691	14.864	1977.6860	33445.8129	2.8269	234.0654
31	0.001624	0.998376	9,841.827	15.983	1871.7570	31468.1269	2.8813	231.2385
32	0.001749	0.998251	9,825.844	17.185	1771.2960	29596.3699	2.9365	228.3573
33	0.001884	0.998116	9,808.658	18.480	1676.0171	27825.0739	2.9930	225.4208
34	0.002029	0.997971	9,790.179	19.864	1585.6488	26149.0569	3.0496	222.4278
35	0.002186	0.997814	9,770.314	21.358	1499.9350	24563.4081	3.1079	219.3782
36	0.002354	0.997646	9,748.956	22.949	1418.6315	23063.4731	3.1654	216.2703
37	0.002535	0.997465	9,726.007	24.655	1341.5090	21644.8416	3.2234	213.1049
38	0.002730	0.997270	9,701.352	26.485	1268.3491	20303.3326	3.2821	209.8815
39	0.002940	0.997060	9,674.867	28.444	1198.9445	19034.9836	3.3411	206.5994
40	0.003166	0.996834	9,646.423	30.541	1133.0992	17836.0390	3.4004	203.2583
41	0.003410	0.996590	9,615.883	32.790	1070.6273	16702.9398	3.4605	199.8579
42	0.003672	0.996328	9,583.092	35.189	1011.3521	15632.3126	3.5201	196.3974
43	0.003954	0.996046	9,547.903	37.752	955.1075	14620.9605	3.5796	192.8773
44	0.004258	0.995742	9,510.151	40.494	901.7355	13665.8530	3.6394	189.2977
45	0.004585	0.995415	9,469.657	43.418	851.0862	12764.1174	3.6988	185.6583
46	0.004938	0.995062	9,426.238	46.547	803.0180	11913.0312	3.7586	181.9595
47	0.005317	0.994683	9,379.692	49.872	757.3959	11110.0132	3.8171	178.2009
48	0.005725	0.994275	9,329.820	53.413	714.0937	10352.6173	3.8751	174.3838
49	0.006164	0.993836	9,276.407	57.180	672.9910	9638.5236	3.9321	170.5087
50	0.006637	0.993363	9,219.227	61.188	633.9741	8965.5327	3.9883	166.5767
51	0.007145	0.992855	9,158.039	65.434	596.9350	8331.5586	4.0427	162.5883
52	0.007693	0.992307	9,092.605	69.949	561.7724	7734.6236	4.0964	158.5456
53	0.008282	0.991718	9,022.655	74.726	528.3893	7172.8512	4.1480	154.4492
54	0.008915	0.991085	8,947.930	79.771	496.6949	6644.4619	4.1972	150.3012
55	0.009597	0.990403	8,868.159	85.108	466.6037	6147.7669	4.2445	146.1040
56	0.010330	0.989670	8,783.051	90.729	438.0338	5681.1632	4.2890	141.8595
57	0.011119	0.988881	8,692.322	96.650	410.9090	5243.1294	4.3307	137.5705
58	0.011967	0.988033	8,595.672	102.864	385.1565	4832.2204	4.3689	133.2398
59	0.012879	0.987121	8,492.808	109.379	360.7083	4447.0640	4.4034	128.8709
60	0.013860	0.986140	8,383.429	116.194	337.5003	4086.3556	4.4339	124.4675
61	0.014914	0.985086	8,267.235	123.298	315.4716	3748.8554	4.4597	120.0336
62	0.016048	0.983952	8,143.937	130.694	294.5655	3433.3838	4.4807	115.5739
63	0.017265	0.982735	8,013.243	138.349	274.7283	3138.8183	4.4959	111.0932
64	0.018574	0.981426	7,874.895	146.268	255.9100	2864.0900	4.5055	106.5973
65	0.019980	0.980020	7,728.626	154.418	238.0633	2608.1800	4.5085	102.0918
66	0.021490	0.978510	7,574.208	162.770	221.1439	2370.1167	4.5046	97.5833
67	0.023111	0.976889	7,411.439	171.286	205.1104	2148.9728	4.4932	93.0787
68	0.024851	0.975149	7,240.153	179.925	189.9243	1943.8624	4.4738	88.5855
69	0.026720	0.973280	7,060.228	188.649	175.5493	1753.9381	4.4461	84.1117
70	0.028724	0.971276	6,871.578	197.379	161.9513	1578.3889	4.4094	79.6656
71	0.030874	0.969126	6,674.199	206.059	149.0989	1416.4376	4.3633	75.2562
72	0.033180	0.966820	6,468.140	214.613	136.9627	1267.3387	4.3075	70.8929
73	0.035651	0.964349	6,253.527	222.944	125.5150	1130.3760	4.2415	66.5854
74	0.038300	0.961700	6,030.583	230.971	114.7301	1004.8610	4.1651	62.3440
75	0.041136	0.958864	5,799.611	238.573	104.5838	890.1309	4.0779	58.1789
76	0.044174	0.955826	5,561.038	245.653	95.0537	785.5471	3.9800	54.1010
77	0.047424	0.952576	5,315.385	252.077	86.1183	690.4934	3.8712	50.1210
78	0.050902	0.949098	5,063.308	257.733	77.7575	604.3752	3.7517	46.2498
79	0.054619	0.945381	4,805.576	262.476	69.9522	526.6176	3.6215	42.4982
80	0.058592	0.941408	4,543.100	266.189	62.6838	456.6655	3.4813	38.8766
81	0.062834	0.937166	4,276.911	268.735	55.9347	393.9816	3.3314	35.3953
82	0.067362	0.932638	4,008.175	269.999	49.6873	338.0470	3.1725	32.0640
83	0.072190	0.927810	3,738.177	269.859	43.9244	288.3597	3.0056	28.8914
84	0.077337	0.922663	3,468.318	268.229	38.6289	244.4353	2.8317	25.8858
85	0.082817	0.917183	3,200.088	265.022	33.7834	205.8064	2.6520	23.0541
86	0.088649	0.911351	2,935.067	260.191	29.3702	172.0231	2.4679	20.4021
87	0.094850	0.905150	2,674.876	253.712	25.3711	142.6529	2.2810	17.9342
88	0.101436	0.898564	2,421.164	245.593	21.7675	117.2818	2.0929	15.6532
89	0.108424	0.891576	2,175.571	235.884	18.5398	95.5143	1.9054	13.5603
90	0.115832	0.884168	1,939.687	224.678	15.6679	76.9746	1.7202	11.6550
91	0.123677	0.876323	1,715.009	212.107	13.1308	61.3067	1.5393	9.9348
92	0.131973	0.868027	1,502.902	198.342	10.9070	48.1758	1.3644	8.3954
93	0.140737	0.859263	1,304.559	183.600	8.9740	37.2689	1.1971	7.0311
94	0.149983	0.850017	1,120.960	168.125	7.3090	28.2949	1.0391	5.8339
95	0.159723	0.840277	952.835	152.190	5.8889	20.9859	0.8916	4.7948
96	0.169970	0.830030	800.645	136.086	4.6903	15.0970	0.7557	3.9033
97	0.180733	0.819267	664.559	120.108	3.6902	10.4066	0.6322	3.1476
98	0.192020	0.807980	544.452	104.546	2.8656	6.7165	0.5216	2.5155
99	0.203837	0.796163	439.906	89.669	2.1947	3.8509	0.4240	1.9939
100	1.000000	0.000000	350.237	350.237	1.6562	1.6562	1.5699	1.5699

Bibliografía:

- Bower, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt. *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Itasca, Illinois (1986)

- Chester Wallace Jordan. *Life Contingencies,* Society of Actuaries Chicago, Illinois (1967)

- Latorre Llorens Luís. *Teoría del Riesgo y sus Aplicaciones a la Empresa Aseguradora*, Fundación Mapfre, España (1992)

- Jozef L. Teugels & Bjorn Sundt, *Encyclopedia of Actuarial Science,* John Wiley & Sons ltd, England (2004)

- Paul G. Hoel, Sidney C. Port & Charles J. Stones, *Introduction to Probability Theory*, University of California, los Angeles, Houghton Mifflin Company Boston (1971)

- Paul G. Hoel, Sidney C. Port & Charles J. Stones, *Introduction to Statistical Theory*, University of California, los Angeles, Houghton Mifflin Company Boston (1971)

- Circular S-10.1.7 Se dan a conocer a las instituciones de seguros y sociedades mutualistas de seguros, las disposiciones de carácter general para el registro de los métodos actuariales de valuación, constitución e incremento de la reserva de riesgos en curso de los seguros de vida.

- Circular S-10.1.7.1 Se dan a conocer a las instituciones y sociedades mutualistas de seguros, las disposiciones de carácter general para el establecimiento del método actuarial para la determinación del monto mínimo de la reserva de riesgos en curso de los seguros de vida.

  Ambas publicadas en el Diario Oficial de la Federación el 30 de septiembre de 2003.

- Ley sobre el contrato de Seguro reformada y publicada 31 de marzo de 2009

- Aranda Martínez Oscar & Castillo García Nadia Araceli. *Funciones Actuariales como Variables Aleatorias sobre una sola vida,* Red Matemática UNAM (2010).