Manipulación de expresiones algebraicas en Maple

José Luis Torres Rodríguez*

Marzo 2011

Maple proporciona diversas funciones que nos permiten realizar manipulaciones sobre expresiones algebraicas, tales como simplificaciones, factorizaciones, expansión de expresiones con exponentes, agrupación de términos comunes, normalización de expresiones racionales, manipulación del numerador y denominador de una expresión racional; además de conversion de tipos de expresiones, entre otras. A lo largo de este capítulo describiremos várias de las funciones que nos permiten realizar este tipo de manipulaciones.

1. Simplificación

Al manipular una expresión, Maple lleva a cabo simplificaciones automáticas sobre ésta. El sistema fue diseñado para mantener las expresiones en la forma que fueron introducidas; sin embargo, en el caso de expresiones aritméticas, se llevan a cabo algunas simplificaciones sencillas en sumas, productos, cocientes y potencias de números enteros y racionales, números racionales expresados en forma fraccionaria, reducción de monomios semejantes y expresiones en las que puede aplicarse la propiedad asociativa, entre otras. Por ejemplo:

- Normalización de fracciones:

```
> -54/9*x^2 + 16/128*x + 32/4 = 0;
```

$$-6\,x^2 + \frac{1}{8}\,x + 8 = 0$$

- Expresiones con operaciones aritméticas y racionales:

```
> 2^3*x^3 - 4.2/8*x^2 + x/(3.5*4);
```

$$8\,x^3 - 0{,}5250000000\,x^2 + 0{,}07142857143\,x$$

- Agrupación de términos identicos en sumas y productos:

```
> a + b + c + 2*a - 4*c;
```

$$3\,a + b - 3\,c$$

- Reordenamiento de productos, colocando el factor constante al inicio de la expresión:

```
> a*b*3^2*x;
```

$$9\,a\,b\,x$$

- Eliminación de factores sintácticamente idénticos en el numerador y el denominador de fracciones algebraicas:

```
> (a*b)/(a*x^2*b);
```

$$\frac{1}{x^2}$$

*Coordinación de Cómputo, Facultad de Ciencias, UNAM

- Eliminación de elementos repetidos en conjuntos:

  ```
  > {x, a, b, a, f, g, x};
  ```

  $$\{f, g, a, x, b\}$$

- Combinación de potencias de acuerdo a la regla $(x^r)^s = x^{(r\,s)}$, cuando r y s son racionales y además $-1 < r \leq 1$:

  ```
  > (x^(3/5))^(2/3), (x^(1/3))^(-3/4);
  ```

  $$x^{(2/5)}, \frac{1}{x^{(1/4)}}$$

- Distribución de potencias según la regla $(x\,y)^r = x^r\,y^r$, cuando r es un número racional, y x o y son positivos:

  ```
  > (4*x)^(2/3), (3/x)^(2/3);
  ```

  $$4^{(2/3)}\,x^{(2/3)}, 3^{(2/3)}\,(\frac{1}{x})^{(2/3)}$$

También se llevan a cabo otras simplificaciones, como producto de la evaluación de ciertas expresiones, por ejemplo:

```
> ln(1/2);
```

$$-\ln(2)$$

```
> cos(Pi/4);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

```
> abs(abs(x));
```

$$|x|$$

Cabe aclarar que, en estos últimos casos en realidad no se lleva a cabo una simplificación automática, ésta es resultado de la evaluación.

Cuando se usan expresiones más complicadas, las reglas de simplificación automática no las reducen a su forma más simple. En estos casos es necesario solicitar explicitamente la simplificación; esto puede hacerse por medio del comando **simplify**; su sintaxis es:

simplify(expr);
simplify(expr, regla1, regla2, ..., reglan);

Donde **expr** es la expresión a simplificar. También se pueden especificar, opcionalmente, las reglas de simplificación que deseamos aplicar a la expresión; aunque esta instrucción puede aplicar reglas de simplificación apropiadas para cada tipo de expresión, de tal forma que generalmente obtenemos una forma más simple. Por ejemplo, consideremos los siguientes ejemplos:

```
> 9^(1/2) - 3;
```

$$\sqrt{9} - 3$$

```
> 9^n/(3^n*3^n) - 1;
```

$$\frac{9^n}{(3^n)^2} - 1$$

Nótese que en ambos casos no se realiza la simplificación. Intentemos usando **simplify**:

```
> simplify(9^(1/2) - 3);
```

$$0$$

```
> simplify(9^n/(3^n*3^n) - 1);
```

$$0$$

Veamos otro ejemplo:

```
> F1 := exp(-ln(x) + x)*(x^2 + 2*sin(x)^2 + 2*cos(x)^2 - 3*x - 2);
```

$$F1 := e^{(-\ln(x)+x)}\,(x^2 + 2\sin(x)^2 + 2\cos(x)^2 - 3\,x - 2)$$

```
> simplify(F1);
```

$$e^x\,(x-3)$$

Algunas de las opciones soportadas por simplify nos permiten aplicas reglas específicas, por ejemplo cuando las expresiones involucran funciones trigonometricas, logaritmos o radicales; como veremos a continuación.

1.1. Simplificación de expresiones con funciones trigonométricas

Para llevar a cabo este tipo de simplificaciones debemos incluir la opción **trig** como argumento de la función **simplify**.

```
> sin(x)^3;
```

$$\sin(x)^3$$

```
> simplify(%, trig);
```

$$\sin(x) - \sin(x)\cos(x)^2$$

```
> 1 + tan(x)^2, simplify(%, trig);
```

$$1 + \tan(x)^2,\ \sin(x) - \sin(x)\cos(x)^2$$

```
> cos(2*x) + sin(x)^2 = simplify(cos(2*x) + sin(x)^2, trig);
```

$$\cos(2\,x) + \sin(x)^2 = \cos(x)^2$$

1.2. Simplificación de expresiones con las opciones radical y symbolic

Consideremos la siguiente expresión:

```
> e := [(x^3 + 3*x^2*a + 3*x*a^2 + a^3)^(1/3) + (8*y)^(1/3),
> (y^3)^(1/2) + (-27)^(1/3)];
```

$$e := [\,(x^3 + 3\,x^2\,a + 3\,x\,a^2 + a^3)^{(1/3)} + 8^{(1/3)}\,y^{(1/3)},\ \sqrt{y^3} + (-27)^{(1/3)}\,]$$

Nótese que Maple no considera automáticamente **sqrt(x^2)** igual a **x**, pues ésta última podria ser negativa o compleja. Para forzar la evaluación a **x** (asumiendo que es un real positivo) necesitamos incluir las opciones **radical** y **symbolic**.

```
> simplify(e, radical);
```

$$[\,((a+x)^3)^{(1/3)} + 2\,y^{(1/3)},\ \sqrt{y^3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,I\,\sqrt{3}\,]$$

```
> simplify(e, radical, symbolic);
```

$$[\,a + x + 2\,y^{(1/3)},\ y^{(3/2)} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,I\,\sqrt{3}\,]$$

Otra forma en la que se puede forzar la simplificación en este tipo de expresiones es indicando a Maple que suponga una cierta propiedad para las incógnitas. Por ejemplo, consideremos la siguiente expresión:

```
> f := (-8*n^8*c)^(1/4);
```

$$f := (-8\,n^8\,c)^{(1/4)}$$

Primero intentemos simplificarla solo con **simplify**:

```
> simplify(f);
```

$$2^{(3/4)}\,(-n^8\,c)^{(1/4)}$$

Puede notarse que solo se aplica la regla de simplificación para radicales sobre **“8"** y sobre **“(-n^3*c)"**, sin embargo este último producto no puede ser simplificado pues no se sabe nada acerca de n y de c. Volvamos a simplificar, indicandole a **simplify** que asuma las incognitas como reales, esto podemos hacerlo por medio de la opción **assume=real**:

```
> simplify(f, assume=real);
```

$$n^2\,2^{(3/4)}\,(-c)^{(1/4)}$$

Otra opción más que puede aplicarse es **symbolic**, con la cual **simplify** considera las variables como simbólicas:

```
> simplify(f, symbolic);
```

$$(1+I)\,n^2\,2^{(1/4)}\,c^{(1/4)}$$

También podemos usar la función **assume** para indicar que la constante **c** debe ser considerada, por ejemplo, mayor que cero:

```
> assume(c > 0);
> simplify(f);
```

$$2^{(3/4)}\,c\tilde{}^{(1/4)}\,(-n^8)^{(1/4)}$$

1.3. Simplificación de acuerdo a reglas definidas por el usuario

Otra forma de llevar a cabo una simplificación es especificando una igualdad para que se aplique al hacer esta operación. Por ejemplo, consideremos la siguiente relación:

```
> rel_lateral := {sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1};
```

$$\mathit{rel\_lateral} := \{\sin(x)^2+\cos(x)^2=1\}$$

Simplificaremos la siguiente expresión, usando para ello **rel_lateral**:

```
> expr1 := sin(x)^3 - 11*sin(x)^2*cos(x) + 3*cos(x)^3 - sin(x)*cos(x) + 2;
```

$$\mathit{expr1} := \sin(x)^3-11\sin(x)^2\cos(x)+3\cos(x)^3-\sin(x)\cos(x)+2$$

```
> simplify(expr1, rel_lateral);
```

$$14\cos(x)^3-\sin(x)\cos(x)+2-\sin(x)\cos(x)^2+\sin(x)-11\cos(x)$$

También es posible especificar varias relaciones para que la función **simplify** las aplique al realizar la simplificación, veamos un ejemplo:

```
> rels := {z^3 - z^2 - z*y + 2*y^2 = 1, z^3 + y^2 = 1,
> z^2 + z*y - y^2 = 0, x + y = z};
```

$$\mathit{rels} := \{x+y=z,\ z^2+z\,y-y^2=0,\ z^3+y^2=1,\ z^3-z^2-z\,y+2\,y^2=1\}$$

```
> h1 := 36*z^4*y^2 + 36*z*y^4 - 36*z*y^2 - 1/2*z^2 + z*y - 1/2*y^2 +
> 1/2*x*z - 1/2*x*y + 2/3*z^4 + 4/3*z^3*y - 2/3*z^2*y^2 - 4/3*z*y^3 +
> 2/3*y^4;
```

$$\mathit{h1} := 36\,z^4\,y^2+36\,z\,y^4-36\,z\,y^2-\frac{1}{2}\,z^2+z\,y-\frac{1}{2}\,y^2+\frac{1}{2}\,x\,z-\frac{1}{2}\,x\,y+\frac{2}{3}\,z^4+\frac{4}{3}\,z^3\,y-\frac{2}{3}\,z^2\,y^2-\frac{4}{3}\,z\,y^3+\frac{2}{3}\,y^4$$

```
> simplify(h1, rels);
```

$$0$$

1.4. Simplificación de expresiones con radicales anidados

La función **simplify** puede simplificar expresiones con radicales simples, pero no puede hacerlo cuando los radicales se encuentran anidados, por ejemplo:

```
> s := sqrt(2*(3 - sqrt(2) - sqrt(3) + sqrt(6)));
```

$$s := \sqrt{6 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}$$

```
> simplify(s);
```

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

Este tipo de expresiones deben ser simplificadas usando la función **radnormal**, de la siguiente forma:

```
> radnormal(s);
```

$$-1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

2. Factorización

Maple permite llevar a cabo factorizaciones por medio de la función **factor**. Por ejemplo:

```
> factor(2*x^5 + 9*x^4 - 5*x^3 - 49*x^2 - 57*x - 20);
```

$$(x + 4)(2x - 5)(x + 1)^3$$

```
> factor(x^3 - x/3);
```

$$\frac{x(3x^2 - 1)}{3}$$

Por omisión, este función lleva a cabo la factorización de acuerdo al tipo de coeficientes que aparecen en el polinomio, a menos que se indique otra cosa. Por ejemplo:

```
> factor(2*I*x^3 - 14*I*x^2 + 80*I*x + 4*I);
```

$$2I(x^3 - 7x^2 + 40x + 2)$$

Podemos indicar que la factorización se lleve a cabo en terminos de numeros complejos, de la siguiente forma:

```
> factor(x^4 + b^4, I);
```

$$(x^2 + b^2 I)(x^2 - b^2 I)$$

Esta función también puede ser aplicada a integrales, en este caso se lleva a cabo la factorización sobre el integrando:

```
> factor(Int(x^2 + 2*b*x + b^2, x));
```

$$\int (x + b)^2\, dx$$

También es posible llevar a cabo factorizaciones en expresiones que involucran varias incognitas:

```
> factor(x^2*cos(y)^5 - x^2*cos(y)^2 + 2*x^2*cos(y)^3 - 2*x^2);
```

$$x^2(\cos(y) - 1)(\cos(y)^2 + \cos(y) + 1)(\cos(y)^2 + 2)$$

3. Expansión de expresiones

La función ***expand*** nos permite expandir expresiones en las que aparecen exponentes y productos de polinomios. Esta expansión se lleva a cabo principalmente distribuyendo productos sobre sumas, aunque también tiene la capacidad para desarrollar expresiones en las que aparecen funciones trigonométricas, logaritmos, binomiales, entre muchas otras. Por ejemplo:

```
> expand((x + 1)^2*(x - 1));
```

$$x^3 + x^2 - x - 1$$

```
> expand([sin(2*x), sin(3*x)*cos(x)]);
```

$$[\,2\sin(x)\cos(x),\, 4\sin(x)\cos(x)^3 - \sin(x)\cos(x)\,]$$

Podemos indicar a **expand** que no opere algún término, incluyendo este al final de la instrucción (lo mismo puede hacerse para varios términos, escribiendolos en forma de secuencia):

```
> expand((1 - x)*(1 - 2*x)/(x*(1 + y)*(1 + 2*x)), 1 + y);
```

$$\frac{1}{x\,(1+y)\,(1+2\,x)} - \frac{3}{(1+y)\,(1+2\,x)} + \frac{2\,x}{(1+y)\,(1+2\,x)}$$

4. Agrupación de términos

Por otro lado, la función **combine** nos permite agrupar términos dentro de una expresión. Dependiendo del tipo de ésta y de los términos que se desea combinar, existen diferentes opciones aplicables.

Por ejemplo, para agrupar términos en una expresión trigonométrica usamos la opción **trig**:

```
> combine(2*sin(x)*cos(x), trig);
```

$$\sin(2\,x)$$

Otras opciones aplicables son: **log**, **exp** y **power**, las cuales pueden ser combinadas, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

```
> combine(2*ln(x^2 - 1) - ln(x^2 + 1), ln);
```

$$2\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)$$

```
> combine((x^b)^2 - sqrt(3)^(1/5), power);
```

$$x^{(2\,b)} - 3^{(1/10)}$$

```
> combine([2*sin(x)*cos(x), 2*cos(x)^2 - 1], trig);
```

$$[\,\sin(2\,x),\, \cos(2\,x)\,]$$

```
> combine(exp(sin(x)*cos(b))*exp(cos(x)*sin(b)), [trig, exp]);
```

$$e^{\sin(x+b)}$$

```
> Integral := Int(exp(sin(x)*cos(b))*exp(cos(x)*sin(b)), x);
```

$$\mathit{Integral} := \int e^{(\sin(x)\cos(b))}\, e^{(\cos(x)\sin(b))}\, dx$$

```
> combine(Integral, [trig, exp]);
```

$$\int e^{\sin(x+b)}\, dx$$

5. Normalización

Podemos simplificar expresiones compuestas por fracciones algebraicas por medio de la función ***normal***. Al normalizar una fracción algebraica, ésta se expresa en forma de una fracción irreducible $\boldsymbol{p/q}$. Por ejemplo:

```
> normal((x^2 - y^2)/(x - y)^3);
```

$$\frac{x+y}{(x-y)^2}$$

```
> expr := sin((x*(x + 1) - x)/(x + 2))^2 + cos(x^2*(x + 2)/(x^2 - 4))^2;
```

$$expr := \sin\left(\frac{x\,(x+1)-x}{x+2}\right)^2 + \cos\left(\frac{x^2\,(x+2)}{x^2-4}\right)^2$$

```
> normal(expr);
```

$$\sin\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + \cos\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2$$

Podemos incluir la opción **expanded** para que el resultado de la normalización sea desplegado en forma expandida:

```
> normal((x^4 - y^4)/(x - y)^3, expanded);
```

$$\frac{x^3 + y\,x^2 + y^2\,x + y^3}{x^2 - 2\,x\,y + y^2}$$

No es recomendable usar esta función si el numerador o denominador se complican al ser factorizados, por ejemplo:

```
> normal((x^10 - 1)/(x - 1));
```

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

6. Agrupación de términos respecto a una variable

No siempre es posible factorizar o simplificar una expresión, en algunos casos solo se pueden agrupar términos comunes. Para ejemplificar esto consideremos la siguiente expresión:

```
> expr := x^3*y^2 + x^3*y*b + x^3*y*c + x^3*b - x^3*c + x^2*y*a -
> x^2*y*b + x^2*c - x*y^2*a - x*y^2*b + x*y*c - x*y*d - x*y - x*a -
> x*b + y*a + y*b - 1;
```

$$expr := x^3\,y^2 + x^3\,y\,b + x^3\,y\,c + x^3\,b - x^3\,c + x^2\,y\,a - x^2\,y\,b + x^2\,c - x\,y^2\,a - x\,y^2\,b + x\,y\,c \\ - x\,y\,d - x\,y - x\,a - x\,b + y\,a + y\,b - 1$$

Intentaremos simplificarla y factorizarla:

```
> simplify(expr);
```

$$x^3\,y^2 + x^3\,y\,b + x^3\,y\,c + x^3\,b - x^3\,c + x^2\,y\,a - x^2\,y\,b + x^2\,c - x\,y^2\,a - x\,y^2\,b + x\,y\,c - x\,y\,d \\ - x\,y - x\,a - x\,b + y\,a + y\,b - 1$$

```
> factor(expr);
```

$$x^3\,y^2 + x^3\,y\,b + x^3\,y\,c + x^3\,b - x^3\,c + x^2\,y\,a - x^2\,y\,b + x^2\,c - x\,y^2\,a - x\,y^2\,b + x\,y\,c - x\,y\,d \\ - x\,y - x\,a - x\,b + y\,a + y\,b - 1$$

Como puede apreciarse, no obtenemos una expresión más simple. En este caso podemos usar la función ***collect*** para agrupar términos e intentar obtener una forma más sencilla. Primero intentaremos transformar esta expresión en un polinomio en términos de **x**:

```
> collect(expr, x);
```

$$(y^2 + y\,b + y\,c + b - c)\,x^3 + (y\,a - y\,b + c)\,x^2 + (-b - a - y^2\,b + y\,c - y\,d - y^2\,a - y)\,x - 1 + y\,a + y\,b$$

También podemos agrupar en términos de **x**, de tal forma que cada coeficiente sea un polinomio en términos de **y**:

```
> collect(expr, [x, y]);
```

$$(y^2 + (b + c)\,y - c + b)\,x^3 + ((a - b)\,y + c)\,x^2 + ((-b - a)\,y^2 + (-1 + c - d)\,y - b - a)\,x - 1 + (a + b)\,y$$

Otra posible opción es expresar el polinomio en términos de **y**:

```
> collect(expr, y);
```

$$(-x\,b - x\,a + x^3)\,y^2 + (x^3\,c - x^2\,b - x + x^2\,a + x\,c - x\,d + b + x^3\,b + a)\,y - x\,a - x\,b + x^3\,b - x^3\,c - 1 + x^2\,c$$

Por medio de **collect** podemos aplicar varias opciones a la expresión que estamos manipulando, por ejemplo podemos factorizar cada coeficiente:

```
> collect(expr, x, factor);
```

$$(y^2 + y\,b + y\,c + b - c)\,x^3 + (y\,a - y\,b + c)\,x^2 + (-b - a - y^2\,b + y\,c - y\,d - y^2\,a - y)\,x - 1 + y\,a + y\,b$$

También podemos aplicar funciones a los coeficientes; por ejemplo, aplicaremos la función **sin** a cada uno de los coeficientes de **expr**:

```
> collect(expr, x, sin);
```

$$\sin(y^2 + y\,b + y\,c + b - c)\,x^3 + \sin(y\,a - y\,b + c)\,x^2 - \sin(b + a + y^2\,b - y\,c + y\,d + y^2\,a + y)\,x + \sin(-1 + y\,a + y\,b)$$

Otra posible opción es agrupar términos con respecto a dos o más variables:

```
> collect(expr, [y, x]);
```

$$(x^3 + (-b - a)\,x)\,y^2 + ((b + c)\,x^3 + (a - b)\,x^2 + (-1 + c - d)\,x + a + b)\,y - 1 + (-c + b)\,x^3 + x^2\,c + (-b - a)\,x$$

Veamos otro ejemplo, con la siguiente expresión:

```
> expr2 := ((y^3 + (b + c)*y^2 + (b - c)*y)/(y^2 - (a + b)*y))*x^3 +
> ((a - b)*y^2 + c*y)*x^2/(y^2 + a*y) - ((a + b)*y^3 - (c - d - 1)*y^2 +
> (a + b)*y)*x/(y^2 + (a + b)*y) - 1;
```

$$expr2 := \frac{(y^3 + (b + c)\,y^2 + (-c + b)\,y)\,x^3}{y^2 - (a + b)\,y} + \frac{((a - b)\,y^2 + y\,c)\,x^2}{y^2 + y\,a} - \frac{((a + b)\,y^3 - (-1 + c - d)\,y^2 + (a + b)\,y)\,x}{y^2 + (a + b)\,y} - 1$$

Si aplicamos **simplify**, lejos de simplificarse, se complica la expresion:

```
> simplify(expr2);
```

$$-(x^2\,y^3\,a - x^2\,y\,a^3 - x^2\,y^3\,b + x^2\,y\,b^3 + x^2\,y^2\,c + x^3\,y\,c\,a\,b + x^3\,y\,b^2 + x^3\,b\,a^2 + x^3\,b^2\,a
- x^3\,c\,a^2 + x^3\,y^2\,b^2 + x^3\,y^3\,c - x^3\,y^2\,c + 2\,x^3\,y^3\,a + 2\,x^3\,y^3\,b + x^3\,y^2\,a^2 + x^3\,y^2\,b
+ y\,b^2 + 2\,b\,a^2 + b^2\,a + x^3\,y^4 + y\,a^2 + 2\,x^3\,y^2\,c\,a + x^3\,y^2\,c\,b - x^3\,y\,c\,b - x^3\,c\,a\,b
+ 2\,x^3\,y\,b\,a - 2\,x^3\,y\,c\,a + x^3\,y\,b\,a^2 + x^3\,y\,b^2\,a + x^3\,y\,c\,a^2 + 3\,x^3\,y^2\,a\,b - x^2\,y\,b\,a^2
+ x^2\,y\,b^2\,a - 2\,x^2\,c\,a\,b + 2\,y\,b\,a + x\,y\,d\,b\,a - x\,y\,c\,a\,b + x\,a^3 - x\,y^3 + x\,y\,b^2
+ 2\,x\,b\,a^2 + x\,b^2\,a + x\,y\,a^2 + x\,y^3\,c - x\,y^4\,b + x\,y^3\,b^2 - x\,y^3\,d - x\,y^4\,a + x\,y^2\,a^3
- x\,y^2\,c\,b + 2\,x\,y\,b\,a - x\,y\,c\,a^2 + x\,y\,d\,a^2 + x\,y^2\,d\,b + x\,y^3\,b\,a + x\,y^2\,b^2\,a
+ 2\,x\,y^2\,a^2\,b - x^2\,c\,a^2 - x^2\,c\,b^2 + a^3 - x\,y^2\,a - y^2\,a - y^3)\,/((-y + a + b)\,(y + a)
(y + a + b))$$

Intentaremos simplificarla usando diferentes variantes de la función *collect*:

```
> collect(expr2, x);
```

$$\frac{(y^3 + (b + c)\,y^2 + (-c + b)\,y)\,x^3}{y^2 - (a + b)\,y} + \frac{((a - b)\,y^2 + y\,c)\,x^2}{y^2 + y\,a} - \frac{((a + b)\,y^3 - (-1 + c - d)\,y^2 + (a + b)\,y)\,x}{y^2 + (a + b)\,y} - 1$$

```
> collect(expr2, [x, y]);
```

$$-1 + \frac{(y^3 + (b + c)\,y^2 + (-c + b)\,y)\,x^3}{y^2 + (-b - a)\,y} + \frac{((a - b)\,y^2 + y\,c)\,x^2}{y^2 + y\,a} - \frac{((a + b)\,y^3 + (1 - c + d)\,y^2 + (a + b)\,y)\,x}{y^2 + (a + b)\,y}$$

```
> collect(expr2, [x, y], normal);
```

$$-1 + \frac{(y^3 + (b + c)\,y^2 + (-c + b)\,y)\,x^3}{y^2 + (-b - a)\,y} + \frac{((a - b)\,y^2 + y\,c)\,x^2}{y^2 + y\,a} - \frac{((a + b)\,y^3 + (1 - c + d)\,y^2 + (a + b)\,y)\,x}{y^2 + (a + b)\,y}$$

```
> collect(expr2, [x, y], factor);
```

$$-1 + \frac{(y^3 + (b + c)\,y^2 + (-c + b)\,y)\,x^3}{y^2 + (-b - a)\,y} + \frac{((a - b)\,y^2 + y\,c)\,x^2}{y^2 + y\,a} - \frac{((a + b)\,y^3 + (1 - c + d)\,y^2 + (a + b)\,y)\,x}{y^2 + (a + b)\,y}$$

```
> collect(expr2, [y, x], factor);
```

$$-1 - \frac{(y^2 + y\,b + y\,c + b - c)\,x^3}{-y + a + b} + \frac{(y\,a - y\,b + c)\,x^2}{y + a} - \frac{(b + a + y^2\,b - y\,c + y\,d + y^2\,a + y)\,x}{y + a + b}$$

7. Manipulación del numerador y denominador de una expresión racional

Las funciones **numer** y **denom** nos permiten extraer el numerador y denominador, respectivamente, de una expresión racional. Por ejemplo:

```
> expr_rac := (2*x - sqrt(x + 1) - (1/2)*x^3 - x*sin(2*x))/(1 + 2*x +
> sqrt(x + 1) - (1/2)*x^3 + x^2*sin(2*x));
```

$$expr\_rac := \frac{2\,x - \sqrt{x+1} - \dfrac{x^3}{2} - x\sin(2\,x)}{1 + 2\,x + \sqrt{x+1} - \dfrac{x^3}{2} + x^2\sin(2\,x)}$$

```
> numer(expr_rac);
```

$$4\,x - 2\,\sqrt{x+1} - x^3 - 2\,x\sin(2\,x)$$

```
> denom(expr_rac);
```

$$2 + 4\,x + 2\,\sqrt{x+1} - x^3 + 2\,x^2\sin(2\,x)$$

Nótese que la expresión es normalizada antes de extraer el numerador y denominador. Comparese **expr_rac** con la expresión normalizada:

```
> normal(expr_rac);
```

$$-\frac{-4\,x + 2\,\sqrt{x+1} + x^3 + 2\,x\sin(2\,x)}{2 + 4\,x + 2\,\sqrt{x+1} - x^3 + 2\,x^2\sin(2\,x)}$$

Una vez extraidos el numerador y denominador, podemos aplicar diferentes simplificadores a cada parte:

```
> factor(numer(expr_rac)) / factor(denom(expr_rac));
```

$$\frac{4\,x - 2\,\sqrt{x+1} - x^3 - 2\,x\sin(2\,x)}{2 + 4\,x + 2\,\sqrt{x+1} - x^3 + 2\,x^2\sin(2\,x)}$$

```
> collect(numer(expr_rac), x) / factor(denom(expr_rac));
```

$$\frac{-x^3 + (4 - 2\sin(2\,x))\,x - 2\,\sqrt{x+1}}{2 + 4\,x + 2\,\sqrt{x+1} - x^3 + 2\,x^2\sin(2\,x)}$$

8. Extracción de los coeficientes de un polinomio

Maple nos permite extraer los coeficientes de un polinomio por medio de las funciones **coeff** y **coeffs**. Consideremos la siguiente expresión:

```
> pol := x^3*y^2 + x^3*y*b + x^3*y*c + x^3*b - x^3*c + x^2*y*a - x^2*y*b +
> x^2*c - x*y^2*a - x*y^2*b + x*y*c - x*y*d - x*y - x*a - x*b + y*a +
> y*b - 1;
```

$$pol := x^3\,y^2 + x^3\,y\,b + x^3\,y\,c + x^3\,b - x^3\,c + x^2\,y\,a - x^2\,y\,b + x^2\,c - x\,y^2\,a - x\,y^2\,b + x\,y\,c \\ - x\,y\,d - x\,y - x\,a - x\,b + y\,a + y\,b - 1$$

Podemos expresar este polinomio en términos de x por medio de **collect**:

```
> collect(pol, x);
```

$$(y^2 + y\,b + y\,c + b - c)\,x^3 + (y\,a - y\,b + c)\,x^2 + (-b - a - y^2\,b + y\,c - y\,d - y^2\,a - y)\,x - 1 \\ + y\,a + y\,b$$

También podemos extraer cada uno de los coeficientes del polinomio, especificando la variable principal y la potencia de la cual deseamos el coeficiente:

```
> coeff(pol, x, 3);
```

$$y^2 + y\,b + y\,c + b - c$$

```
> coeff(pol, x, 2);
```

$$y\,a - y\,b + c$$

```
> coeff(pol, x, 1);
```

$$-b - a - y^2\,b + y\,c - y\,d - y^2\,a - y$$

```
> coeff(pol, x, 0);
```

$$-1 + y\,a + y\,b$$

Podemos extraer todos los coeficientes, en forma de secuencia, usando la función **coeffs** de la siguiente forma:

```
> coeffs(pol, x);
```

$$-1 + y\,a + y\,b,\ -b - a - y^2\,b + y\,c - y\,d - y^2\,a - y,\ y\,a - y\,b + c,\ y^2 + y\,b + y\,c + b - c$$

En los siguientes ejemplos, extraeremos los coeficientes de **pol** respecto a **y**. Nótese que automáticamente se agrupan los términos con respecto a la variable especificada, antes de extraer los coeficientes. Compárese con la salida de **collect**:

```
> coeff(pol, y, 2);
```

$$-x\,b - x\,a + x^3$$

```
> coeffs(pol, y);
```

$$-x\,a - x\,b + x^3\,b - x^3\,c - 1 + x^2\,c,\ -x\,b - x\,a + x^3,$$
$$x^3\,c - x^2\,b - x + x^2\,a + x\,c - x\,d + b + x^3\,b + a$$

```
> collect(pol, y);
```

$$(-x\,b - x\,a + x^3)\,y^2 + (x^3\,c - x^2\,b - x + x^2\,a + x\,c - x\,d + b + x^3\,b + a)\,y - x\,a - x\,b + x^3\,b$$
$$-\,x^3\,c - 1 + x^2\,c$$

9. Ordenamiento de términos

La función **sort** no permite ordenar los elementos de una expresión. Esta función también puede ser aplicada a listas de expresiones. Por ejemplo:

```
> sort(1 + x^2 - x);
```

$$x^2 - x + 1$$

Por omisión las expresiones son ordenadas en forma descendente, aunque se puede especificar de que manera se debe realizar el ordenamiento. Por ejemplo, ordenaremos los elementos de la siguiente expresión, en el primer caso solo con respecto a **x**, en el segundo caso con respecto a **x** y con respecto a **y**; y finalmente con respecto a **y** y con respecto a **x**:

```
> poli := x^4*y + 12*x^5*y^2 + 40*x^6*y^4 - 32*x^4*y^3 - 368*x^4*y -
> 320*x^3*y + 768*x + 1024;
```

$$poli := -367\,x^4\,y + 12\,x^5\,y^2 + 40\,x^6\,y^4 - 32\,x^4\,y^3 - 320\,x^3\,y + 768\,x + 1024$$

```
> sort(poli, x);
```

$$40\,y^4\,x^6 + 12\,y^2\,x^5 - 367\,y\,x^4 - 32\,y^3\,x^4 - 320\,y\,x^3 + 768\,x + 1024$$

```
> sort(poli, [x, y]);
```

$$40\,x^6\,y^4 + 12\,x^5\,y^2 - 32\,x^4\,y^3 - 367\,x^4\,y - 320\,x^3\,y + 768\,x + 1024$$

```
> sort(poli, [y, x]);
```

$$40\,y^4\,x^6-32\,y^3\,x^4+12\,y^2\,x^5-367\,y\,x^4-320\,y\,x^3+768\,x+1024$$

Podemos especificar el orden en que se llevará a cabo el ordenamiento, para ello se pueden incluir como opciones '<' o '>', para un orden ascendente o descendente, respectivamente. Por ejemplo:

```
> sort([-2, 4, 8, 5, -4, 10, 25], '>');
```

$$[25,\,10,\,8,\,5,\,4,\,-2,\,-4]$$

```
> sort([-2, 4, 8, 5, -4, 10, 25], '<');
```

$$[-4,\,-2,\,4,\,5,\,8,\,10,\,25]$$

También podemos expecificar la variable y el orden al mismo tiempo:

```
> sort(poli, [x, '>']);
```

$$40\,y^4\,x^6+12\,y^2\,x^5-32\,y^3\,x^4-367\,y\,x^4-320\,y\,x^3+768\,x+1024$$

10. Conversión de expresiones

Otra de las facilidades proporcionadas por Maple es la conversión de expresiones, la cual puede llevarse a cabo por medio de la función **convert**. Ésta nos permite convertir entre diferentes tipos, tales como:

- Convertir series en polinomios:

```
> s1 := taylor(sin(x), x=0);
```

$$s1 := x-\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{120}\,x^5+\mathrm{O}(x^6)$$

```
> convert(s1, polynom);
```

$$x-\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{120}\,x^5$$

- Convertir series en expresiones racionales:

```
> s2 := taylor(exp(x), x=0);
```

$$s2 := 1+x+\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^3+\frac{1}{24}\,x^4+\frac{1}{120}\,x^5+\mathrm{O}(x^6)$$

```
> convert(s2, ratpoly);
```

$$\frac{1+\frac{3}{5}\,x+\frac{3}{20}\,x^2+\frac{1}{60}\,x^3}{1-\frac{2}{5}\,x+\frac{1}{20}\,x^2}$$

- Convertir una expresion racional en fracciones parciales, con respecto a **x**:

```
> g := (x^3 - 3*x + 1)*(x^4 - 5*x^3) / (2*x^4 + 4*x^2 - 5*x);
```

$$g := \frac{(x^3-3\,x+1)\,(x^4-5\,x^3)}{2\,x^4+4\,x^2-5\,x}$$

```
> convert(g, parfrac, x);
```

$$\frac{x^3}{2}-\frac{5\,x^2}{2}-\frac{5\,x}{2}+\frac{57}{4}+\frac{-30\,x^2-278\,x+285}{4\,(2\,x^3+4\,x-5)}$$

- Conversión de senos y tangentes a logaritmos o exponenciales:

```
> convert(sinh(x) + sin(x), exp);
```

$$\frac{1}{2}\,e^x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{e^x} - \frac{1}{2}\,I\,(e^{(x\,I)} - \frac{1}{e^{(x\,I)}})$$

```
> convert(arctanh(x), ln);
```

$$\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$$

- Conversion de listas y conjuntos en sumas y productos....

```
> S := seq(x[i]^2, i=1..10);
```

$$S := {x_1}^2,\, {x_2}^2,\, {x_3}^2,\, {x_4}^2,\, {x_5}^2,\, {x_6}^2,\, {x_7}^2,\, {x_8}^2,\, {x_9}^2,\, {x_{10}}^2$$

```
> convert([S], `+`);
```

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + {x_7}^2 + {x_8}^2 + {x_9}^2 + {x_{10}}^2$$

```
> convert({S}, `*`);
```

$${x_1}^2\,{x_2}^2\,{x_3}^2\,{x_4}^2\,{x_5}^2\,{x_6}^2\,{x_7}^2\,{x_8}^2\,{x_9}^2\,{x_{10}}^2$$

Con esta misma función se pueden llevar a cabo otras conversiones más simples, por ejemplo:

- Conversiones de radianes a grados y viceversa:

```
> convert(Pi/2, degrees);
```

$$90\,\mathit{degrees}$$

```
> convert(120*degrees, radians);
```

$$\frac{2\,\pi}{3}$$

- Conversión de números entre diferentes bases. Por ejemplo:

  - Convertir de decimal a binario, a hexadecimal y a octal:

```
> convert(34, binary);
```

$$100010$$

```
> convert(1234, hex);
```

$$\mathit{4D2}$$

```
> convert(235, octal);
```

$$353$$

  - Convertir a decimal un numero en cualquier base entre 2 y 36. La sintaxis en este caso es:

    convert(número, decimal, base)

    Donde **base** es un número entre 2 y 36, o bien una de las palabras: **binary**, **octal** o **hex**, para binario, octal o hexadecimal, respectivamente. En bases mayores que 10 se pueden usar las letras a (o A) a la z (o Z), para representar los dígitos 10 a 35, respectivamente. Por ejemplo:

```
> convert("1A.C", decimal, hex);
```

$$26{,}75000000$$

```
> convert(110101, decimal, 2);
```

$$53$$

```
> convert(GH23A, decimal, 20);
```

$$2696870$$

- Convertir a octal o hexadecimal un número en cualquier base entre 2 y 36. Este caso es análogo al anterior. Por ejemplo:

```
> convert(3212, octal, decimal);
```

$$6214$$

```
> convert(6214, hex, octal);
```

$$\mathit{1846}$$

```
> convert(1846, decimal, hex);
```

$$6214$$

```
> convert(23483, hex, 9);
```

$$\mathit{5BBB}$$

Los siguientes ejemplos muestran otro tipo de conversiones válidas:

- Convertir números de punto flotante en fracciones:

```
> convert(.3456, fraction);
```

$$\frac{216}{625}$$

- Convertir listas en matrices:

```
> l := [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]];
```

$$l := [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]]$$

```
> convert(l, Matrix, 3, 3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Convertir enteros en bytes y cadenas en enteros:

```
> convert([65, 66, 67], 'bytes');
```

"ABC"

```
> convert(`Hola`, bytes);
```

$$[72, 111, 108, 97]$$

Esta función permite realizar una gran cantidad de conversiones de tipos; por razones de espacio solo se han presentado algunos ejemplos. Vease la página de ayuda **?convert** para obtener una lista completa.