RELACIONES ENTRE CONEXIDADES GRÁFICAS Y TOPOLÓGICAS

por
TERESA HOEKSTRA

Aquí veremos ciertos aspectos de la relacion entre gráficas y topología desde el punto de vista categórico. A partir de una gráfica dirigida podemos definir una topología para el conjunto de sus vértices de modo que el espacio que se obtiene resulta ser de Alexandroff; y viceversa: a partir de un espacio topológico podemos definir una gráfica dirigida que resulta ser un conjunto preordenado. Existe una relación entre los subconjuntos conexos de un espacio topológico y las subgráficas conexas de la gráfica correspondiente. Se presuponen conocimientos elementales de Topología, Teoría de las gráficas y Teoría de las categorías.

Sea $\mathfrak{Gra}$ la categoría que consta de todas las *gráficas dirigidas* y de todas las *funciones compatibles* entre ellas. Denotaremos a una gráfica dirigida por (X,α) donde X es el conjunto subyacente y α la estructura de digráfica, i.e. $\alpha \subseteq X \times X$. A los elementos de α los llamaremos flechas; $(x,y) \in \alpha$ también lo expresaremos escribiendo $x\alpha y$. Dadas dos gráficas dirigidas $(X,\alpha),(Y,\beta)$, una función

$$f : (X,\alpha) \to (Y,\beta)$$

es **compatible** si, y sólo si, para cualesquiera $x_0,x_1 \in X$ vale:

$$x_0\alpha x_1 \Rightarrow f(x_0)\beta f(x_1)$$

Podemos notar que la categoría $\mathfrak{Pros}$ que consta de los conjuntos preordenados y de las funciones monótonas entre ellos, es una subcategoría de $\mathfrak{Gra}$. A un $\mathfrak{Pros}$-objeto lo podemos ver como una digráfica transitiva con todos los bucles o lazos; en ella (x,y) va a ser una flecha si y sólo si $x \leq y$. Los $\mathfrak{Gra}$-morfismos o funciones compatibles son funciones monótonas generalizadas ya que mandan flechas en flechas.

Un espacio topológico (X,τ) es de Alexandroff o **casi discreto** si en él la intersección arbitraria de abiertos es abierta. Denotaremos por $\mathfrak{CDTop}$ a la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ que consta de los espacios de Alexandroff y de las funciones continuas entre ellos. Decimos que un espacio topológico es T_D si todo punto es la intersección de un abierto y un cerrado.

A partir de cualquier digráfica vamos a definir para su conjunto de vértices una topología que resulta ser de Alexandroff. Y viceversa: dado cualquier espacio topológico vamos a definir una relación binaria en su conjunto subyacente que resulta ser un preorden.

Vamos a considerar dos funtores.

$\mathfrak{G} : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Gra}$ que, para los objetos asocia a cada espacio topológico (X,τ) una digráfica (X,α_τ) donde, para todo $(x,z) \in X \times X$ se tiene:

$$x\alpha_\tau z :\Leftrightarrow [(z \in U \wedge U \in \tau) \Rightarrow x \in U]$$

Si $\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$ denota al conjunto de funciones continuas de dominio (X,τ) y codominio (Y,σ), y $\mathfrak{Gra}((A,\alpha),(B,\beta))$ al conjunto de funciones compatibles de dominio (A,α) y codominio (B,β), entonces la regla inducida por $\mathfrak{G}$ para los morfismos viene dada por:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma)) & \to & \mathfrak{Gra}((X,\alpha_\tau),(Y,\alpha_\sigma)) \\ f & \mapsto & f \end{array}$$

No es difícil comprobar que esta regla está bien definida; es decir que siendo $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ una función continua, resulta ser compatible la función $f:(X,\alpha_\tau)\to(Y,\alpha_\sigma)$.

Por otra parte el funtor $\mathfrak{T}:\mathfrak{Gra}\to\mathfrak{Top}$ se define en los objetos como la regla que a toda digráfica (X,α) la asocia con el espacio topológico (X,τ_α), donde para todo $U\subseteq X$ se tiene:

$$U\in\tau_\alpha :\Leftrightarrow [(z\in U\wedge x\alpha z)\Rightarrow x\in U]$$

En los morfismos la regla inducida por $\mathfrak{T}$ viene dada por:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{Gra}((X,\alpha),(Y,\beta)) & \to & \mathfrak{Top}((X,\tau_\alpha),(Y,\tau_\beta)) \\ f & \mapsto & f \end{array}$$

No es difícil comprobar que esta regla está bien definida; es decir que siendo $f:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ una función compatible, resulta ser continua la función $f:(X,\tau_\alpha)\to(Y,\tau_\beta)$.

Para todo conjunto X, $\mathfrak{Gra}[X]$ denotará al conjunto de $\mathfrak{Gra}$-estructuras para X. Del mismo modo, $\mathfrak{Top}[X]$ denotará al conjunto de topologías para X. Puesto que además de estas dos trabajaremos con otras categorías concretas K, convendremos en denotar por $K[X]$ al conjunto de K-estructuras de que puede quedar dotado el conjunto X.

Proposición *Para toda $\alpha\in\mathfrak{Gra}[X]$, (X,τ_α) es un espacio de Alexandroff.*

Demostración Sean U_λ abiertos de τ_α para todo $\lambda\in\Lambda$. Tómense

$$x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \wedge y\alpha x$$

Entonces para toda $\lambda\in\Lambda$, $y\in U_\lambda$. Esto quiere decir que y pertenece a la intersección arbitraria de abiertos por lo que tenemos que $\mathfrak{T}(X,\alpha)$ es Alexandroff.□

Proposición *Para toda $\tau\in\mathfrak{Top}[X]$, (X,α_τ) es un conjunto preordenado.*

Demostración Como para toda $x\in X$ es $x\in\overline{\{x\}}$, tenemos que para toda $x\in X$ es $x\alpha_\tau x$. Sean $x,y,z\in X$ tales que $x\alpha_\tau y$ y $y\alpha_\tau z$. Sea $U\in\tau$ tal que $z\in U$. Entonces $y\in U$ lo cual implica que $x\in U$ por lo que tenemos $x\in\overline{\{z\}}$ y por lo tanto $x\alpha_\tau z$.□

Proposición *Si $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua entonces $f:(X,\leq_\tau)\to(Y,\leq_\sigma)$ es mońotona. Si $g:(X,\alpha)\to(Y,\beta)$ es compatible entonces $g:(X,\tau_\alpha)\to(Y,\tau_\beta)$ es continua.*

Demostración Supongamos primero que $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es continua y sean $x\leq_\tau y$. Entonces $x\in U$ para todo $U\in\tau$ tal que $y\in U$. Ahora sea $U\in\sigma$ tal que $f(y)\in U$. Luego como f es continua $f^{-1}(U)$ es abierto y contiene a y, y como $x\leq y$ tenemos que $f^{-1}(U)$ contiene a x, lo cual implica que $f(x)\in U$ para todo $U\in\sigma$ tal que $f(y)\in U$. Por lo tanto $f(x)\in\overline{\{f(y)\}}$ y $f(x)\leq_\sigma f(y)$.

Ahora supongamos que g es compatible y sea $U\in\tau_\beta$. Sea $x\in g^{-1}(U)$ y $y\alpha x$. Entonces $g(y)\beta f(x)$ lo que implica $g(y)\in U$ por lo que tenemos $y\in g^{-1}(U)$ y por lo tanto $g^{-1}(U)\in\tau_\alpha$ y g es continua.□

Proposición *Un espacio topológico (X,τ) es T_0 si y sólo si $\mathfrak{G}((X,\tau))\in\mathfrak{Pos}$.*

Demostración Supongamos que (X,τ) es T_0 y sean $x,y \in X$ tales que $x \leq_\tau y$ y $y \leq_\tau x$. Si suponemos que $x \neq y$ entonces como (X,τ) es T_0, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ pero esto es un contradicción ya que

$$y \leq_\tau x \Rightarrow y \in \overline{\{x\}}$$

lo cual quiere decir que para todo $U \in \tau$ tal que $x \in U$, $U \cap \{y\} = \emptyset$. Por lo tanto $x = y$ y $(X,\leq_\tau) \in \mathfrak{Pos}$.

Para la otra implicación supongamos que $\mathfrak{G}((X,\tau)) \in \mathfrak{Pos}$ y sean $x \neq y$. Supongamos que todo abierto de x contiene a y y que todo abierto de y contiene a x. Esto implica que $x \leq_\tau y$ y $y \leq_\tau x$ pero esto es una contradicción ya que $x \neq y$ y $\mathfrak{G}((X,\tau)) \in \mathfrak{Pos}$. Por lo tanto (X,τ) es T_0.$\square$

Proposición *$\mathfrak{T}((X,\leq))$ es T_0 si y sólo si $(X,\leq) \in \mathfrak{Pos}$.*

Demostración Supongamos que $(X,\leq) \in \mathfrak{Pos}$. Sean $x \neq y$ en X. Entonces existe un abierto de x que no contiene a y (o viceversa) ya que si todo abierto de x intersecta a $\{y\}$ y todo abierto de y intersecta a $\{x\}$ tendríamos que $x \leq y$ y $y \leq x$ lo cual es una contradicción ya que $x \neq y$ y $(X,\leq) \in \mathfrak{Pos}$.

Ahora supongamos que $\mathfrak{T}((X,\leq))$ es T_0. Sean $x,y \in X$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Suponiendo que $x \neq y$ existiría un abierto de x que no contiene a y (o viceversa) lo cual es una contradicción ya que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por lo tanto $x = y$.$\square$

Proposición *Si $(X,\leq) \in \mathfrak{Pos}$ entonces $\mathfrak{T}((X,\leq))$ es T_D.*

Demostración Sea $x \in X$ y sea $U = \{y \in X \mid y \leq x\}$. Claramente U es un abierto que contiene a x. Ahora sea $V = \{z \in X \mid x \leq z\}$. Como $(X,\leq) \in \mathfrak{Pos}$ tenemos que $U \cap V = \{x\}$. Falta ver que V es cerrado. Tomemos $X - V$ y $w \in X - V$. Si tomamos

$$W = \{v \in X \mid v \leq w\}$$

claramente W es un abierto que contiene a w. Sea $y \in W$ y supongamos que $y \in V$. Como $y \leq w$ y $x \leq y$ esto implicaría $x \leq w$ lo cual es una contradicción ya que $w \notin V$. Por lo tanto $W \subseteq X - V$ y V es cerrado.$\square$

Podemos notar que la implicacion análoga no es cierta. Si $\mathfrak{G}((X,\tau)) \in \mathfrak{Pos}$ entonces (X,τ) no necesariamente es T_D , ya que esto se reduce a que ser T_0 implica ser T_D lo cual es falso, pues la propiedad de ser T_D esta entre T_0 y T_1. Veamos un ejemplo de un espacio topológico que es T_0 pero no es T_D, o bien un espacio tal que $\mathfrak{G}((X,\tau)) \in \mathfrak{Pos}$ pero que no es T_D. Consideremos $X = \mathbb{R}$ con conjuntos cerrados los unitarios disntintos de cero y las uniones finitas de ellos. En otras palabras los conjuntos cerrados son de la forma $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ con $x_i \neq 0$ para $i = 1,\ldots,n$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces si tomamos dos puntos distintos $x,y \in X$ al menos uno de los dos es distinto de cero. Supongamos que $x \neq 0$. Luego como x es cerrado, $X - \{x\}$ es un abierto que contiene a y pero no a x. Por lo tanto el espacio es T_0. Ahora como la cerradura del 0 es X, si queremos que x sea la interseccion de un abierto con un cerrado, como el único cerrado que lo contiene es X, tendria que ser $\{x\} \cap X = \{x\}$. Pero entonces x deberia ser abierto lo cual es una contradicción ya que $X - \{x\}$ no es finito. Por lo tanto el espacio no es T_D.

Para que se cumpla la implicacion debemos de pedirle alguna condición a X.

Lema *Si X es un conjunto finito y $\mathfrak{G}((X,\tau)) \in \mathfrak{Pos}$ entonces (X,τ) es T_D.*

Demostración Como X es finito, su conjunto potencia, $P(X)$, es finito por lo que las intersecciones arbitrarias de abiertos de τ son finitas y (X,τ) es Alexandroff. Entonces $\mathfrak{T}(\mathfrak{G}((X,\tau))) = (X,\tau)$ y por la proposición anterior, tenemos que (X,τ) es T_D.$\square$

Proposición *Dado (X,σ) espacio topológico, en $(X,\tau_{\leq_\sigma})$ todo abierto es la unión de* *intersecciones arbitrarias de abiertos de σ.*

Demostración Sean, U un abierto no vacío de $\tau_{\leq_\sigma}$ y $x_0 \in U$. Sea

$$U_{x_0} = \bigcap\{V \in \sigma \mid x_0 \in V\}$$

Afirmamos que $U_{x_0} \subseteq U$. Sea $y \in U_{x_0}$. Entonces

$$(x_0 \in V \wedge V \in \sigma) \Rightarrow y \in V$$

Esto quiere decir que $y \leq_\sigma x_0$. Por lo tanto, como $U \in \tau_{\leq_\sigma}$ tenemos que $y \in U$. Concluimos que $U_{x_0} \subseteq U$, por lo que también

$$\bigcup_{x \in U} U_x \subseteq U$$

Si $x \in U$ claramente $x \in U_x$. Por lo tanto

$$\bigcup_{x \in U} U_x = U \quad \square$$

Proposición *Dada (X,α) una digráfica, si $(x,y) \in \leq_{\tau_\alpha}$ entonces existe una xy-trayectoria en (X,α).*

Demostración Sea $(x,y) \in \leq_{\tau_\alpha}$. Entonces $x \in \overline{\{y\}}$, esto es $x \in U$ para todo $U \in \tau_\alpha$ tal que $y \in U$. Sea

$$V_y = \left\{z \in X \mid \exists \text{ una } zy - \text{trayectoria dirigida en } \alpha \text{ de longitud } n = 0,1,2\ldots\right\}$$

En particular tenemos que $y \in V_y$ para toda $y \in X$ y además $V_y \in \tau_\alpha$ ya que si $z \in V_y$ y $(w,y) \in \alpha$ entonces claramente también $w \in V_y$. Por lo tanto $x \in V_y$.$\square$

Teorema *Dado un espacio topológico (X,τ), tenemos que $(X,\tau) = \mathfrak{T}(\mathfrak{G}((X,\tau)))$ si y sólo si (X,τ) es un espacio de Alexandroff.*

Demostración Si $(X,\tau) = \mathfrak{T}(\mathfrak{G}((X,\tau)))$, por la primera proposición (X,τ) es de Alexandroff. Ahora supongamos que (X,τ) es Alexandroff y sea $(X,\sigma) = \mathfrak{T}(\mathfrak{G}((X,\tau)))$. Probaremos que $\tau = \sigma$. Sea $U \in \tau$ y $x \in U$. Entonces $y \leq_\tau x \Rightarrow y \in U$. Si hacemos

$$V = \{v \in X \mid v \leq_\tau x\}$$

entonces $x \in V$, $V \in \sigma$ y si $z \in V$ entonces $z \in U$, por lo que $V \subseteq U$ y $U \in \sigma$. Concluimos que $\tau \subseteq \sigma$. Ahora sea $A \in \sigma$ y $x \in A$. Consideremos

$$W = \bigcap\{B \in \tau \mid x \in B\}$$

Por ser (X,τ) Alexandroff tenemos que $W \in \tau$ y claramente $x \in W$. Falta ver que $W \subseteq A$. Sea $w \in W$; entonces $w \leq_\tau x$ y por lo tanto $w \in A$. Concluimos que $\tau = \sigma$.$\square$

Teorema *Para una digráfica dada (X,α) tenemos que $(X,\alpha) = \mathfrak{G}(\mathfrak{T}((X,\alpha)))$ si y sólo si $(X,\alpha) \in \mathfrak{Pros}$.*

Demostración Si $(X,\alpha) = \mathfrak{G}(\mathfrak{T}((X,\alpha)))$ tenemos, por la segunda proposición, $(X,\alpha) \in \mathfrak{Pros}$. Ahora supongamos que $(X,\alpha) \in \mathfrak{Pros}$. Sea $(X,\beta) = \mathfrak{G}(\mathfrak{T}((X,\alpha)))$. Sean $(x,y) \in \alpha$. Entonces $x \in U$ para todo $U \in \tau_\alpha$ tal que $y \in U$. Pero esto quiere decir que $y \in \overline{\{x\}}$ y por lo tanto $(x,y) \in \beta$. Ahora sea $(x,y) \in \beta$. Entonces, por la proposición anterior, existe una xy-trayectoria en (X,α), y como α es preorden, por la transitividad esto implica que $(x,y) \in \alpha$. Por lo tanto $\alpha = \beta$.$\square$

En otras palabras lo que nos dicen estos últimos teoremas y proposiciones es que $(X,\leq_{\tau_\alpha})$ es el mínimo conjunto preordenado que contiene a la digráfica (X,α) o bien es la digráfica que se obtiene al añadirle todos los bucles a (X,α) y todas las flechas necesarias y suficientes para que α sea transitiva. Asi mismo $\tau_{\leq_\sigma}$ es la mínima $\mathfrak{CDTop}$-estructura para X que contiene a σ, o bien es el espacio topológico que se obtiene a partir de (X,σ) al agregarle a σ las intersecciones arbitrarias de abiertos.

Teorema $(X,\tau_{\leq_\sigma})$ *es el* $\mathfrak{CDTop}$*-correflector de* (X,σ).

Demostración Se sabe que $(X,\tau_{\leq_\sigma})$ es un espacio cas discreto; veamos que es continua la identidad $1_X : (X,\tau_{\leq_\sigma}) \to (X,\sigma)$. Sea $U \in \sigma$. Hay que probar que $U \in \tau_{\leq_\sigma}$. Sea $x \in U$ y sea $y \leq_\sigma x$. Entonces $y \in U$. Quiere decir que U satisface la condición de pertenencia a $\tau_{\leq_\sigma}$. Concluimos que 1_X es continua. Ahora supóngase que (W,ω) es casi discreto y que $f : (W,\omega) \to (X,\sigma)$ es un $\mathfrak{Top}$-morfismo. Hay que probar que existe una única función continua $g : (W,\omega) \to (X,\tau_{\leq_\sigma})$ tal que $f = 1_X \circ g$. Proponemos como g a la función $f : (W,\omega) \to (X,\tau_{\leq_\sigma})$. Claramente $f = 1_X \circ f$. Falta ver que esta f es continua. Sabemos que es continua la función

$$f : (W,\omega) \to (X,\sigma)$$

Por una proposición anterior tenemos que es monótona la función

$$f : (W,\leq_\omega) \to (X,\leq_\sigma)$$

Por lo tanto es continua la función

$$f : (W,\tau_{\leq_\omega}) \to (X,\tau_{\leq_\sigma})$$

Como $(W,\omega) \in \mathfrak{CDTop}$ tenemos que $(W,\tau_{\leq_\omega}) = (W,\omega)$ por lo que podemos afirmar que es continua la función

$$f : (W,\omega) \to (X,\tau_{\leq_\sigma})$$

Por último falta ver que esta función es única. Supongamos que existe otra función g con las mismas propiedades. Entonces $f = 1_X \circ f = 1_X \circ g$. Sea $x \in X$,

$$f(x) = 1_X(f(x)) = 1_X(g(x)) = g(x)$$

Por lo tanto g tiene la misma regla de correspondencia que f y, según se ha supuesto, tiene el mismo dominio y codominio. Por lo tanto $f = g$.$\square$

Teorema $(X,\leq_{\tau_\alpha})$ *es el* $\mathfrak{Pros}$*-reflector de la digráfica* (X,α).

Demostración Se sabe que $(X,\leq_{\tau_\alpha})$ es un conjunto preordenado; veamos que es compatible la identidad $1_X : (X,\alpha) \to (X,\leq_{\tau_\alpha})$. Sea $(x,y) \in \alpha$. Hay que probar que $x \leq_{\tau_\alpha} y$. Tenemos que para todo $U \in \tau_\alpha$ tal que $y \in U$ tenemos que $x \in U$. Esto quiere decir que vale la implicación

$$(y \in U \wedge U \in \tau_\alpha) \Rightarrow x \in U$$

lo cual es equivalente a que $x \leq_{\tau_\alpha} y$; por lo tanto 1_X es compatible. Ahora supóngase que $(W,\preceq)$ es un conjunto preordenado y que $f : (X,\alpha) \to (W,\preceq)$ es un $\mathfrak{Gra}$-morfismo. Hay que probar que existe una única función monótona $g : (X,\leq_{\tau_\alpha}) \to (W,\preceq)$ tal que $f = g \circ 1_X$. Proponemos como dicha función a $f : (X,\leq_{\tau_\alpha}) \to (W,\preceq)$. Claramente $f = f \circ 1_X$. Falta ver que esta f es monótona. Sabemos que es compatible la función

$$f : (X,\alpha) \to (W,\preceq)$$

Por una proposición anterior tenemos que es continua la función

$$f : (X,\tau_\alpha) \to (W,\tau_\preceq)$$

Por lo tanto es monótona la función

$$f : (X,\leq_{\tau_\alpha}) \to (W,\leq_{\tau_\preceq})$$

Como $(W,\preceq) \in \mathfrak{Pros}$ tenemos que $(W,\leq_{\tau_\preceq}) = (W,\preceq)$ por lo que podemos afirmar que es monótona la función

$$f : (X, \leq_{\tau_\alpha}) \to (W, \preceq)$$

Por último falta ver que esta función es única. Supongamos que existe otra función g con las mismas propiedades. Entonces g tiene el mismo dominio y codominio que f y $g \circ 1_X = f \circ 1_X = f$. Entonces para todo $x \in X$

$$g(x) = g(1_X(x)) \ = f(1_X(x)) \ = f(x)$$

Por lo tanto g tiene la misma regla de correspondencia que f. Por lo tanto $f = g$.□

Mediante $\mathfrak{Gph}$ denotaremos a la categoría cuyos objetos son parejas (X, A) en las que X es un conjunto y

$$A \subseteq \{e \in Pot(X) : \#e = 2\}$$

Los $\mathfrak{Gph}$-objetos se llaman **gráficas**. Sean (X, A) y (Y, B) unas gráficas y $f : X \to Y$ una función cualesquiera; diremos que $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un $\mathfrak{Gph}$-**morfismo** ssi para cualesquiera $x_0, x_1 \in X$ se tiene que

$$[\{x_0, x_1\} \in A] \Rightarrow [\{f(x_0), f(x_1)\} \in B]$$

Desde luego, para todo conjunto X,

$$\mathfrak{Gph}[X] = Pot(\{e \in Pot(X) : \#e = 2\})$$

Para todo conjunto X definimos

$$\begin{array}{rccl} I_X : & \mathfrak{Gph}[X] & \to & \mathfrak{Top}[X] \\ & A & \mapsto & \tau_A \end{array}$$

donde

$$U \in \tau_A :\Leftrightarrow [(x_1 \in U \wedge \{x_0, x_1\} \in A) \Rightarrow x_0 \in U]$$

Nótese que para todo $A \in \mathfrak{Gph}[X]$ es $\tau_A \in \mathfrak{CDTop}[X]$.

También consideremos, para todo conjunto X,

$$\begin{array}{rccl} Gr_X : & \mathfrak{Pros}[X] & \to & \mathfrak{Gph}[X] \\ & \leq & \mapsto & A_\leq \end{array}$$

donde

$$\{x_0, x_1\} \in A_\leq :\Leftrightarrow [(x_0 \neq x_1) \wedge (x_0 \leq x_1 \vee x_1 \leq x_0)]$$

Decimos que una gráfica (X, A) es una **gráfica de comparabilidad** si $A = Gr_X(\leq)$, para algún $\leq \in \mathfrak{Pos}[X]$. $\underline{\mathfrak{C}}$ denotará a la subcategoría de $\mathfrak{Gph}$ de las gráficas de comparabilidad.

Proposición *Para todo conjunto* X *y cualquier* $\leq \in \mathfrak{Pros}[X]$ *es* $(X, Gr_X(\leq)) \in \underline{\mathfrak{C}}$.

Demostración Definamos una relación de equivalencia $\simeq$ en X que para cualesquiera $x, z \in X$, sea

$$x \simeq z :\Leftrightarrow x \leq z \wedge z \leq x$$

En $(X/\simeq)$ podemos definir un preorden $\preceq$ como $[x] \preceq [z]$ si y sólo si existen $x \in [x]$ y $z \in [z]$ tales que $x \leq z$. Según definimos la relación de equivalencia $\simeq$, es fácil ver que

$$((X/\simeq), \preceq) \in \mathfrak{Pos}$$

Veamos que, para toda $[x] \in (X/\simeq)$, podemos dar un orden total a $[x]$ que *se acople* al preorden $\leq$ de X, en el sentido de conservación de la transitividad. Procedamos por reducción al absurdo suponiendo lo contrario, esto es, que existe $[x] \in (X/\simeq)$ tal que cualquiera que sea un orden total $\leqq$ para $[x]$, siempre habrá una flecha doble

$$u \leqq v \quad v \leqq u$$

que al orientarla hace que se pierde la transitividad. Es decir, si $u,v \in [u]$ entonces existen

$$z \in [z] \neq [u] \quad \text{y} \quad y \in [y] \neq [u]$$

tales que

$$u \leq z \leq v \quad \text{y} \quad v \leq y \leq u$$

Pero esto quiere decir que en $(X,\leq)$ tenemos un ciclo dirigido de logintud 4, por lo que ambas diagonales deben ser flechas dobles. Entonces

$$([z] = [y]) \wedge ([u] \preceq [z] \wedge [z] \preceq [u])$$

lo cual contradice que $((X/\simeq),\preceq) \in \mathfrak{Pos}$. Por lo tanto toda flecha doble según $\leq$ se puede orientar de modo que no se pierda la transitividad. Con esto hemos obtenido un orden parcial α en X tal que

$$Gr_X(\alpha) = Gr_X(\leq)$$

con lo que la proposición queda demostrada.□

Observación $1_X : (X,\alpha) \to (X,\leq)$ *es monótona.*

Para cualquier espacio topológico (X,τ) sean $C(X,\tau)$ el conjunto de todos los subconjuntos conexos de (X,τ) y $FC(X,\tau)$ el conjunto de subconjuntos conexos finitos. Similarmente podemos definir $C(X,A)$ el conjunto de todas las subgráficas conexas de una gráfica (X,A) y $FC(X,A)$ el conjunto de las subgráficas conexas finitas.

Se dice que un espacio topológico (X,τ) y una gráfica (X,A) son **compatibles** si

$$C(X,\tau) = C(X,A)$$

Observación *Para toda* $\alpha \in \mathfrak{Gra}[X]$*, tenemos que en* $\mathfrak{T}(X,\alpha)$ *para toda* $x \in X$

$$\overline{\{x\}} = \{y \in X : x\alpha y\}$$

Teorema *Sean, un conjunto* X *y cualquier* $\tau \in \mathfrak{Top}[X]$*. Entonces*

1. $C(X,Gr_X(\leq_\tau)) \subseteq C(X,\tau)$
2. $FC(X,Gr_X(\leq_\tau)) = FC(X,\tau)$
3. $C(X,Gr_X(\leq_\tau)) = C(X,\tau)$, si $\tau \in \mathfrak{CDTop}[X]$.

Demostración 1. Sea H una subgráfica conexa de $(X,Gr_X(\leq_\tau))$; hay que probar que H es un subconjunto conexo de (X,τ). Sea A un conjunto abierto y cerrado a la vez y sea $x \in A$. Entonces $\overline{\{x\}} \subseteq A$ ya que la cerradura de x es el cerrado más pequeño que contiene a x. Sea $z \in H - A$. Como A es abierto, su complemento es cerrado y nuevamente tenemos que $\overline{\{z\}} \subseteq H - A$. Además

$$\overline{\{x\}} \cap \overline{\{z\}} = \varnothing$$

Veamos que no existen flechas entre los conjuntos $\overline{\{x\}}$ y $\overline{\{z\}}$. Supongamos que existe una flecha (u,v) con $u \in \overline{\{z\}}$ y $v \in \overline{\{x\}}$. Esto implica $u \leq v \leq x$ y por lo tanto $u \in \overline{\{z\}} \cap \overline{\{x\}}$ lo cual es una contradicción. Pero el hecho de que la afirmación sea cierta contradice el hecho de que H sea una subgráfica conexa de $(X,Gr_X(\leq_\tau))$. Por lo tanto H es un subconjunto conexo de (X,τ).

Demostración 2. Por el inciso anterior sólo falta demostrar que

$$FC(X,\tau) \subseteq FC(X, Gr_X(\leq_\tau))$$

Sea $(H,\tau \mid_H)$ un subespacio conexo y finito de (X,τ). Claramente $(H, Gr_H(\leq_{\tau|_H}))$ es finita. Veamos que también es conexa procediendo por reducción al absurdo. Entonces existen al menos dos componentes conexas. Sin que se pierda generalidad podemos suponer que hay exactamente dos componentes conexas A y B. Como H es finita podemos enumerar sus vértices. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los vértices que se quedan contenidos en la componente A y sean $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$ los vértices que se quedan contenidos en la componente B. Puesto que cada componente es conexa podemos ver a las componentes como la unión de las cerraduras de sus vértices:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\{x_i\}} \qquad B = \bigcup_{i=n+1}^{m} \overline{\{x_i\}}$$

Como la unión finita de cerrados es cerrada tenemos que entonces A y B son cerrados; y como uno es el complemento del otro en H también son abiertos y su intersección es vacía. Esto implica que $(H,\tau \mid_H)$ un subespacio disconexo de (X,τ), lo cual es una contradicción.

Demostración 3. En el inciso anterior utilizamos el hecho de que $(H,\tau \mid_H)$ fue finito para ver que la unión de todas las cerraduras era cerrada. Puesto que (X,τ) es de Alexandroff, ahora podemos valernos de que en (X,τ) la unión arbitraria de cerrados es cerrada, para obtener el mismo resultado.$\square$

Corolario *Si un espacio topológico (X,τ) tiene una gráfica compatible G entonces $G = (X, Gr_X(\leq_\tau))$.*

Corolario *Todo espacio de Alexandroff tiene una gráfica de comparabilidad.*

Teorema *Si (X,A) es una gráfica de comparabilidad, entonces existe*

$$\tau \in T_D[X] \cap \mathfrak{CDTop}[X]$$

con la que (X,τ) resulta compatible a (X,A).

Demostración Si a cualquier orientacion transitiva (X,B) de (X,A) le agregamos todos los bucles obtenemos un $\mathfrak{Pos}$-objeto $(X,\leq)$. Entonces $(X,\tau_\leq)$ es un espacio T_D y, por la primera proposición, también es un espacio casi discreto. Por último tenemos que $(X,\tau_\leq)$ es compatible con $(X, Gr_X(\leq_\tau))$ debido a 3 del teorema anterior.$\square$

[**W**] ([**W**]) Richard G. Wilson, “una relación entre la conexidad de las gráficas y la conexidad de los espacios topológicos”, 1993.

[**V**] ([**V**]) Roberto Vázquez, “reflexividad, correflexividad y teoría de las estructuras matemáticas”, http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol006/volsix_5.html

[**Ve**] ([**Ve**]) Luis Venegas, “conexidad en categorías concretas de conjuntos estructurados”, http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol031/volthirtyone_1.html

[**B**] ([**B**]) Enrique Bazúa, “fibraciones y correflexiones”, http://www.red-mat.unam.mx/foro/volumenes/vol030/volthirty_1.html