Sobre un concepto de derivada (a la Caratheodory) sin el formalismo epsilon-delta a la Cauchy

José Antonio Gómez Ortega
Rita Vázquez Padilla

Una definición equivalente de derivada

Para una función real definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ y un número $a \in I$ es común encontrar en los libros de cálculo diferencial la siguiente definición de que una función f sea derivable en a.

Definición 1. *La función $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$, si existe el siguiente límite,*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El valor del límite es llamado la derivada de f en a, y se denota por $f'(a)$.

Ahora, si definimos la función $f_1 : I \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

tenemos que $f_1(x)$ es continua en a, y que

$$f(x) = f(a) + (x - a) f_1(x), \text{ para toda } x \in I$$

Recíprocamente si la función $f(x)$ se escribe de la forma anterior alrededor de a, con $f_1(x)$ continua en a, tenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f_1(x) = f_1(a),$$

por lo que la función f es derivable en a, y con $f'(a) = f_1(a)$.
Lo anterior muestra que la definición 1, es equivalente a la siguiente:

Definición 2. *La función $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in I$, si existe una función f_1 continua en a, de manera que alrededor de a se cumpla:*

$$f(x) = f(a) + (x - a) f_1(x)$$

El valor $f_1(a)$ es llamado la derivada de f en a, y se denota por $f'(a)$.

Una ventaja de la segunda definición es que permite hacer demostraciones de propiedades del operador derivada sin usar ε y δ. Veamos unos ejemplos.

Proposición 1. *Si la función $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, entonces es continua en a.*
Demostración.
Esto se debe a que $f(x) = f(a) + (x - a) f_1(x)$ se ha escrito como el producto de dos funciones continuas en a más una constante.

Proposición 2. *Si las funciones $f, g : I \to \mathbb{R}$ son derivables en a y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f + g$, λf, fg y $\dfrac{1}{f}$ (en el caso que $f(a) \neq 0$), son derivables en a. Y cumplen las reglas de derivación siguientes:*

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a) \\ (\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a) \\ (fg)'(a) &= f'(a) g(a) + f(a) g'(a) \\ \left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \frac{-f'(a)}{f(a)^2}. \end{aligned}$$

Demostración.
Como f, g son derivables en a, existen f_1 y g_1 funciones continuas en a, tales que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f_1(x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = g(a) + (x-a)g_1(x)$$

no es difícil ver que

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= (f+g)(a) + (x-a)(f_1+g_1)(x),\\
(\lambda f)(x) &= (\lambda f)(a) + (x-a)(\lambda f_1)(x),\\
(fg)(x) &= (fg)(a) + (x-a)(f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + (x-a)f_1(x)g_1(x)),\\
\left(\frac{1}{f}\right)(x) &= \left(\frac{1}{f}\right)(a) + (x-a)\frac{-f_1(x)}{f(a)f(x)}.
\end{aligned}$$

Como $(f_1+g_1)(x)$, $(\lambda f_1)(x)$, $f_1(x)g(a) + f(a)g_1(x) + (x-a)f_1(x)g_1(x)$ y $\dfrac{-f_1(x)}{f(a)f(x)}$ son continuas en a, tenemos que $f+g$, λf, fg y $\dfrac{1}{f}$ son derivables en a. Además, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= (f_1+g_1)(a) = f'(a) + g'(a)\\
(\lambda f)'(a) &= (\lambda f_1)(a) = \lambda f'(a)\\
(fg)'(a) &= f_1(a)g(a) + f(a)g_1(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\\
\left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \frac{-f_1(a)}{f(a)f(a)} = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}.
\end{aligned}$$

Proposición 3. *(Regla de la cadena). Si la función $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, y la función $g : J \to \mathbb{R}$, con $f(I) \subset J$ es derivable en $b = f(a)$, entonces $g \circ f$ es derivable en a y $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Demostración. Como f y g son derivables en a y $b = f(a)$, respectivamente, existen f_1 y g_1 funciones continuas en a y en b, tales que:

$$\begin{gathered}
f(x) = f(a) + (x-a)f_1(x) \text{ con } f'(a) = f_1(a) \text{ y}\\
g(w) = g(b) + (w-b)g_1(w) \text{ con } g'(b) = g_1(b).
\end{gathered}$$

Pero,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(b) + (f(x)-b)g_1(f(x)) = g(f(a)) + (x-a)f_1(x)g_1(f(x)).$$

Como $f(x)$ y $f_1(x)$ son continuas en a y $g_1(w)$ lo es en $b = f(a)$, se tiene que $f_1(x)g_1(f(x))$ es continua en a, luego $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = f_1(a)g_1(f(a)) = g'(f(a))f'(a).$$

Proposición 4. *(Teorema de la función inversa) Si f es inyectiva en un intervalo I y derivable en $a \in I$ con $f'(a) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $b = f(a)$, y*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demostración.
Como f es derivable en a, existe f_1 función continua en a tal que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f_1(x) \text{ con } f'(a) = f_1(a).$$

Si $y = f(x)$, la ecuación anterior se escribe como

$$y = b + (f^{-1}(y) - f^{-1}(b))f_1(f^{-1}(y))$$

por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(b) + (y - b)\frac{1}{f_1(f^{-1}(y))}.$$

Se puede dividir entre $f_1(f^{-1}(y))$ ya que f_1 no se anula alrededor de a, en virtud de que f_1 es continua en a y $f_1(a) = f'(a) \neq 0$.
Como, f^{-1} es continua en $b = f(a)$, se tiene que $\frac{1}{f_1(f^{-1}(y))}$ es continua en b, por lo que f^{-1} es derivable en b. Además,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f_1(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f_1(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Proposición 5. *Si la función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un máximo local o un mínimo local en $a \in I$, y la función es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.*
Demostración.
Como f es derivable en a, existe una función continua f_1 en a, tal que $f(x) = f(a) + (x - a)f_1(x)$ y con $f_1(a) = f'(a)$.
Si a es máximo local, $f(x) - f(a) \leq 0$ alrededor de a, entonces $(x - a)f_1(x) \leq 0$ alrededor de a, luego $f_1(x) \leq 0$, para $x \geq a$ y $f_1(x) \geq 0$, para $x \leq a$, lo que implica por continuidad de f_1 en a, que $f_1(a) = 0$, y entonces $f'(a) = 0$.

Proposición 6. *(Teorema fundamental del cálculo diferencial). Si $f : [a, b] \to R$ es una función continua entonces existe una función primitiva $F(x)$ de $f(x)$ y única salvo la suma de una constante, además se cumple que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*
Demostración.
Existencia. Considere $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, por el teorema del valor medio para integrales se tiene que

$$F(x) - F(y) = \int_y^x f(t)dt = f(z)(x - y), \text{ donde } z = z(x, y) \text{ está entre } x \text{ y } y.$$

Cuando $x \to y$, el número $z = z(x, y)$ tiende a y y la continuidad de f en y implica que $\lim_{x\to y} f(z) = f(y)$. Luego $h(x) = f(z(x, y))$ es una función continua en y, por lo que:

$$F(x) - F(y) = f(z)(x - y) = h(x)(x - y),$$

nos dice que F es derivable en y y $F'(y) = h(y) = f(y)$, por lo que F es primitiva de f. Y cumple que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Unicidad. Si F y G son primitivas de f en $[a, b]$, se tiene que $F' = G'$ en $[a, b]$, por lo que $F = G + c$ en $[a, b]$.

Ejemplo. *Si la función $f : I \to R$ es continua con $f(I) \subset I'$, $h : I' \to R$ es derivable en I' con $h'(x) \neq 0$ en $f(I)$ y son tales que $h \circ f$ es derivable en I, entonces f es derivable en I.*
Solución.
Si h es derivable en $b = f(a)$ se tiene que $h(w) = h(b) + (w - b)h_1(w)$, con h_1 continua en b. Si tomamos $w = f(x)$, tenemos que $h(f(x)) = h(f(a)) + (f(x) - f(a))h_1(f(x))$, por lo que:

$$f(x) - f(a) = \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{h_1(f(x))}$$

Pero $h \circ f$ es derivable en a, luego $(h \circ f)(x) = (h \circ f)(a) + (x - a)H_1(x)$, por lo que al sustituir, tenemos que,

$$f(x) - f(a) = \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{h_1(f(x))} = \frac{(x - a)H_1(x)}{h_1(f(x))}.$$

Ahora si $x \to a$, la función $f(x) \to f(a)$ y entonces para x cerca de a, $h_1(f(x)) \neq 0$. Luego $f(x) - f(a) = (x - a)k(x)$ donde $k(x) = \frac{H_1(x)}{h_1(f(x))}$ es continua y $f'(a) = k(a) = \frac{H_1(a)}{h_1(f(a))} = \frac{(h\circ f)'(a)}{h'(f(a))}$.

Extensiones

Para funciones complejas de variable compleja.
La funcioń $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $a \in G$ si existe $f_1 : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en a tal que,

$$f(z) = f(a) + (z-a)f_1(z) \text{ alrededor de } a.$$

Además $f_1(a) = f'(a)$.
Las cuatro primeras proposiciones anteriores son ciertas en este caso.

Para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.
La función, $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es derivabe en $a = (a_1, ..., a_n) \in G$, si existen funciones continuas $f_1, ..., f_n$ en a de manera que:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)f_i(x), \text{ para } x = (x_1, ..., x_n) \text{ alrededor de } a.$$

Aquí resulta que $f_i(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, para cada $i = 1, ..., n$.

Para trayectorias o curvas en $\mathbb{R}^n$.
La curva $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, es derivable en $a \in I$, si existe $f_1 : I \to \mathbb{R}^n$ continua en a, tal que

$$f(t) = f(a) + (t-a)f_1(t), \text{ para } t \text{ alredor de } a.$$

También resulta que $f_1(a) = f'(a)$.

Para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.
Definición. (Fréchet) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función y $a \in U$. La función f *es derivable en a,* si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y existe una función $r : U \to \mathbb{R}^m$ continua en a con $r(a) = 0$ tales que

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + r(x)\left\|x-a\right\|.$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Ya que $\dfrac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = r(x) \to 0$ si y sólo si $r(x)$ es continua en a y $r(a) = 0$.
Si definimos $h(x) = T + r(x)\frac{(x-a)^t}{\|x-a\|}$, para x en una vecindad de a, la función toma valores en $L(R^n, R^m)$ el espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, aquí $r(x)\frac{(x-a)^t}{\|x-a\|}$ es la transformación lineal que induce la matriz que se obtiene al multiplicar el vector columna $r(x)$ con el vector renglón $\frac{(x-a)^t}{\|x-a\|}$. Además como $\|h(x) - T\| \leq \|r(x)\|$ la función $h(x) - T$ es continua en a, luego $h(x)$ también es continua en a. Y entonces podemos reformular la definición de derivable como:

Definición. (A la Carathéodory). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función y $a \in U$. La función f *es derivable en a,* si existe una función $h(x)$ definida en una vecindad de a y que toma valores en $L(R^n, R^m)$, que sea continua en a y tal que,

$$f(x) = f(a) + h(x)(x-a), \text{ para } x \text{ en una vecindad de } a.$$

Desde luego si lo anterior se cumple, se tiene que:

$$f(x) = f(a) + h(x)(x-a) = f(a) + h(a)(x-a) + (h(x) - h(a))\tfrac{(x-a)}{\|x-a\|}\left\|x-a\right\|$$

por lo que si consideramos la transformación $T = h(a)$ y la función $r(x) = (h(x) - h(a))\frac{(x-a)}{\|x-a\|}$, tenemos que:

$$f(x) = f(a) + T(x-a) + r(x)\|x-a\|.$$

Y como $\|r(x)\| \leq \|h(x) - h(a)\| \left\| \frac{(x-a)}{\|x-a\|} \right\| = \|h(x) - h(a)\|$, por la continuidad de h en a tenemos que $r(x)$ es continua en a. Luego las dos definiciones son equivalentes.

Las propiedades de derivación se cumplen, por ejemplo las siguientes dos proposiciones dan muestra de ello.

Proposición 7. *(Regla de la cadena). Si $f : U \subset R^n \to R^m$ es una función derivable en $a \in U$ y $g : f(U) \subset R^m \to R^r$ es también una función derivable en $b = f(a)$, entonces la función $(g \circ f)(x)$ es derivable en a y $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Demostración.
Si $f(x) = f(a) + h(x)(x-a)$ y $g(y) = g(b) + k(y)(y-b)$, con $h(x)$ y $k(y)$ continuas en a y b, respectivamente. Entonces tenemos,

$$g(f(x)) = g(f(a)) + k(f(x))(f(x) - f(a)) = g(f(a)) + k(f(x))h(x)(x-a).$$

Y como $k(f(x))h(x)$ es continua en a, tenemos que $g \circ f$ es derivable en a y $(g \circ f)'(a) = k(f(a))h(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Proposición 8. *Una función $f : U \subset R^2 \to R$ que tiene derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en una vecindad de $(a,b) \in U$ y que son continuas en (a,b), es derivable en (a,b).*

Demostración.
Escribimos $f(x,y) - f(a,b) = f(x,y) - f(a,y) + f(a,y) - f(a,b)$,
Por el teorema del valor medio para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tenemos que:
$f(x,y) - f(a,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,y)(x-a)$, para alguna α ente x y a,
$f(a,y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,\beta)(y-b)$, para alguna β entre y y b.
Luego, $f(x,y) - f(a,b) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,y), \frac{\partial f}{\partial y}(a,\beta)) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = h(x,y) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$, donde $h(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,y), \frac{\partial f}{\partial y}(a,\beta))$, tal función $h(x,y)$ es continua en (a,b), ya que si $(x,y) \to (a,b)$ entonces $(\alpha,y) \to (a,b)$ y $(a,\beta) \to (a,b)$ y las parciales son continuas en (a,b). Por tanto la función f es derivable en (a,b).

Teorema de la función implícita

Teorema de la función implícita. *Sean $f : U \subset R^2 \to R$ una función y $(a,b) \in U$ de manera que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en una vecindad de (a,b). Si $f(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, entonces existen vecindades U de a, V de b y existe una función derivable $y : U \to V$ tal que $y(a) = b$ y $f(x,y(x)) = 0$, para $x \in U$ y con $y'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))}$ en la vecindad U.*

Demostración.
Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$.
Por la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que:

$$|x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq \varepsilon > 0.$$

Luego $f(a,y)$ es una función creciente en y y como $f(a,b) = 0$ se tiene que $f(a,b-\delta) < 0 < f(a,b+\delta)$. la continuidad de f impica que existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$f(x,b-\delta) < 0 < f(x,b+\delta), \text{ para } |x-a| \leq \delta_1.$$

Sean $U = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ y $V = (b - \delta, b + \delta)$ y apliquemos el teorema del valor intermedio a $f(x,y)$ como función de y y con x fija, lo que da un $y = y(x)$ tal que $f(x, y(x)) = 0$ y entonces una función $y : U \to V$. La unicidad de $y(x)$ en V es consecuencia de que $f(x,y)$ es monótona como función de y.
Ahora veamos que $y(x)$ es derivable en cada punto $x_1 \in U$.
Como $0 = f(x, y(x)) = f(x_1, y_1) + \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y(x))(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, \beta)(y(x) - y_1)$ donde $y_1 = y(x_1)$, α está entre x y x_1, β entre $y(x)$ y $y(x_1) = y_1$.
Luego $y(x) - y_1 = h(x)(x - x_1)$ donde $h(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \beta)}$. Ahora veamos que $h(x)$ es continua en x_1. Primero veamos que $y(x)$ es continua en x_1, así: la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $|x - a| \leq \delta_1$, $|y - b| \leq \delta_1$, luego acotada en tal cuadrado digamos por $M > 0$, por lo que $|h(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}$, ya que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq \varepsilon$, por lo que $|y(x) - y_1| = |h(x)(x - x_1)| \leq \frac{M}{\varepsilon}|x - a|$ lo que garantiza que $y(x)$ sea continua en x_1. Ahora $h(x)$ es continua ya que todas las funciones que involucra $h(x)$ $(\alpha, \beta, y(x), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ son continuas.
Finalmente $y'(x_1) = h(x_1) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y(x_1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y(x_1))}$.

Teorema de Fubini, para funciones continuas

En toda esta parte $I = [a, b]$ y $J = [c, d]$.
Lema 1. *Si $f : I \times J \to R$ es una función (uniformemente) continua, entonces $g : J \to R$ definida por $g(y) = \int_I f(x, y)dx$, es continua en J. De igual manera $h : I \to R$ definida por $h(x) = \int_J f(x, y)dy$ es continua en I.*

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$, por ser f uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que $|x - x'| < \delta$ y $|y - y'| < \delta$ implican $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$.
Por lo que: $|g(y) - g(y')| = \left|\int_I (f(x, y) - f(x, y'))dx\right| \leq \int_I |f(x, y) - f(x, y')| \, dx \leq \varepsilon \, |I|$, si $|y - y'| < \delta$, lo que garantiza que g es continua en y' y entonces en J.

Lema 2. *Sea $f : I \times J \to R$ una función continua, tal que $\frac{\partial f}{\partial y} : I \times J \to R$ es una función uniformemente continua. Si $g(y) = \int_I f(x, y)dx$, entonces g es derivable en J y $g'(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$.*
Demostración.
Primero hacemos notar que una función $g(y)$ es derivable en a si y sólo si existe una función $g_1(y)$ que es continua en a y tal que $g(y) = g(a) + (y - a)g_1(y)$ en una vecindad de a. En tal caso $g'(a) = g_1(a)$.
Y que la parcial de f con respecto a y existe en el punto (x, a) si y sólo si existe una función $h_1(x, y)$ que es continua en la variable y en a y tal que $f(x, y) = f(x, a) + (y - a)h_1(x, y)$, para y alrededor de a. Si es el caso $\frac{\partial f}{\partial y}(x, a) = h_1(x, a)$. Ahora bien, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ es uniformemente continua en $I \times J$ si y sólo si $h_1(x, y)$ es uniformemente continua en $I \times J$.
Ahora como,

$$g(y) - g(a) = \int_I (f(x, y) - f(x, a))dx = \int_I (y - a)h_1(x, y)dx = (y - a)\int_I h_1(x, y)dx = (y - a)G_1(y)$$

donde $G_1(y) = \int_I h_1(x, y)dx$, que por el lema 1, es continua en a. Tenemos que, $g(y)$ es derivable en a y $g'(a) = G_1(a) = \int_I h_1(x, a)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, a)dx$, como queriamos mostrar.

Teorema de Fubini. *Sea $f : I \times J \to R$ una función continua, entonces se cumple la siguiente identidad*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Demostración.
Para $t \in [c, d]$, se definen $g(t) = \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y)dy \right) dx$ y $h(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$.
Como $f(x, y)$ es continua en $I \times J$, por el lema 1, $F(x, t) = \int_c^t f(x, y)dy$, es una función continua en x. También por el teorema fundamental del cálculo la función $F(x, t)$ es derivable (y entonces continua) como función de t. Pero también es continua en $I \times J$, en efecto,

$$\begin{aligned}
|F(x,t)-F(x',t')| &= |F(x,t)-F(x,t')+F(x,t')-F(x',t')| \\
&\le \left|\int_{t'}^{t} f(x,y)dy\right| + \left|\int_c^{t'} (f(x,y)-f(x',y))dy\right| \\
&\le \int_{t'}^{t} |f(x,y)|\, dy + \int_c^{t'} |f(x,y)-f(x',y)|\, dy
\end{aligned}$$

y las dos últimas integrales se aproximan a cero si $x \to x'$ y $t \to t'$.
Además $\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$ es continua en $I \times J$, luego uniformemente continua. Por el lema 2, $g(t) = \int_a^b F(x,t)dx$ es derivable en J y para $t \in J$, $g'(t) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)dx$.
Por otro lado, el teorema fundamental del cálculo garantiza que $h(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$ es derivable en $[c,d]$ con $h'(t) = \int_a^b f(x,t)dx$, para $t \in [c,d]$.
Luego $g' - h' \equiv 0$ en $[c,d]$, y entonces $g-h$ es constante en $[c,d]$, pero $g(c) = h(c) = 0$, lo que implica que g y h coinciden en $[c,d]$, pero $g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$ y $h(d) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$, por tanto $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$.

José Antonio Gómez Ortega
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@fciencias.unam.mx

Rita Vázquez Padilla
Academia de Matemáticas
Universidad Autónoma de la Ciudad de México
ritavz14@hotmail.com.mx

Bibliografía

Harier, E. - Wanner, G. *L'analyse au fil de l'histoire*. Springer, 2000.

Bagby, R. *Introductory analysis.* Academic Press, 2001.

Khun, S. *The derivative á la Carthéodory.* The Teaching of Mathematics, 1991.

Carathéodory, C. *Theory of functions of a complex variable vol I.* Chelsea, 1950.

Remmert, R. *Theory of complex functions.* Springer-Verlag, 1991.