Índice general

Introducción

El objetivo del presente trabajo es contextualizar una pregunta que Graciela Salicrup y Roberto Vázquez formulan en el artículo "Fibraciones y Correflexiones" [1]; concretamente, saber si toda $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión es una fibración de Hurewicz.

De esto se desprendería inmediatamente, gracias a los resultados expuestos en dicho artículo, si $\underline{A}_{\mathcal{H}}$ es o no una h-subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

A fin de aclarar el contexto de la conjetura, se estudian las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ desde dos perspectivas diferentes.

En el capítulo 2 se da la definición de subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y algunos ejemplos que ilustran un método para obtener subcategorías correflexivas a partir de una propiedad determinada.

En el capítulo 3 se muestra un método para obtener subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ a partir de ciertas clases de funciones.

Por último en el capítulo 4 se describe a un tipo particular de 1-clase, y a través de una de ellas se define la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$. Se describe a dicha subcategoría junto con sus correflexiones y se formula la conjetura.

El capítulo 1 tiene como objetivo servir de glosario, fijar notación, y en caso de ser necesario, como recordatorio de ciertos conceptos o resultados.

No hay mejor introducción al artículo "Fibraciones y Correflexiones" [1], que la que realizó Leticia Montoya en su trabajo homónimo [2], el presente texto sigue el orden de dicho trabajo y se recomienda su lectura a quien encuentre poca claridad en alguna demostración aquí expuesta u omitida. Así mismo, si este trabajo parece abundar en detalles, se recomienda la lectura directa del artículo.

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo tiene como objetivo servir de glosario, fijar notación, y en caso de ser necesario, como recordatorio de ciertos conceptos o resultados. Se recomienda por tanto iniciar la lectura en el capítulo 2 y sólo consultar este cuando sea necesario.

Se entenderá, a lo largo de este texto, por $\mathfrak{Set}$ a la categoría de todos los conjuntos junto con todas las funciones entre ellos (la cual se denotará por $Mor(\mathfrak{Set})$), la composición usual de funciones y a las funciones identidad que se denotará por 1_X, cuando X sea el dominio y codominio de dicha identidad.

Cuando se haga referencia a una función f cuyo dominio es el conjunto X y cuyo contradominio es el conjunto Y, se abreviará todo esto con la siguiente notación: $f \in \mathfrak{Set}(X,Y)$.

Se entenderá así mismo, a lo largo de este texto, por $\mathfrak{Top}$ a la categoría de todos los espacios topológicos junto con todas las funciones continuas entre ellos (la cual se denotará por $Mor(\mathfrak{Top})$), la composición usual de funciones y a las funciones identidad.

Cuando se haga referencia a una función continua f cuyo dominio es el espacio topológico (X,τ) y cuyo contradominio es el espacio topológico (Y,σ), se abreviará todo esto con la siguiente notación: $f \in \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$.

Al conjunto de todas las topologías para un conjunto X, se le donotará por $\mathfrak{Top}[X]$.

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados, todos sin demostración, que en caso de ser necesario se pueden consultar en el libro ”Introducción a la Topología” de Graciela Salicrup [3].

1.1. Inicialidad y finalidad

Definición 1.1 *Una **fuente de funciones** es una clase de funciones con dominio común*

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

donde I es una clase que puede ser vacía, singular o propia. Si

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

es una fuente y $(X_i, \tau_i)_I$ *es una clase de espacios topológicos,* ***la topología inicial de*** X ***respecto a*** $(f_i, \tau_i)_I$ *está dada por*

$$\tau = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathfrak{Top}[X] : \forall i \in I, f_i \in \mathfrak{Top}\left((X,\alpha),(X_i,\tau_i)\right)\right\}$$

Un sumidero de funciones es una clase de funciones con codominio común

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

donde I *es una clase que puede ser vacía, singular o propia. Si*

$$(f_i : X_i \to X)_I$$

es un sumidero y $(X_i, \tau_i)_I$ *es una clase de espacios topológicos,* ***la topología final de*** X ***respecto de*** $(\tau_i, f_i)_I$ *está dada por*

$$\tau = \sup\left\{\alpha \in \mathfrak{Top}[X] : \forall i \in I, f_i \in \mathfrak{Top}\left((X_i,\tau_i),(X,\alpha)\right)\right\}$$

Definición 1.2 *Se dice que una fuente de funciones*

$$(f_i : X \to X_i)_I$$

1. ***separa puntos****, si para cualesquiera* $x, y \in X, x \neq y$*, existe* $i \in I$ *tal que* $f_i(x) \neq f_i(y)$*.*
2. *es una* ***monofuente*** *si para cualesquiera* $g, h \in \mathfrak{Set}(W, X)$ *tales que para toda* $i \in I$*,* $f_i g = f_i h$*, se tiene que* $g = h$*.*

Proposición 1.1 *Una fuente de funciones separa puntos si, y sólo si, es monofuente.*

Definición 1.3 *Se dice que un sumidero de funciones* $(f_i : X_i \to X)_I$

1. **cubre puntos**, si $X = \bigcup_{i \in I} f_i X_i$
2. es un **episumidero** si para cualesquiera $g, h \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ tales que para toda $i \in I$, $g f_i = h f_i$, se tiene que $g = h$.

Proposición 1.2 *Un sumidero de funciones cubre puntos si, y sólo si, es episumidero.*

Teorema 1.1 *Si* $(f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$ *es una fuente de funciones entre espacios topológicos, entonces son equivalentes*

1. τ es inicial respecto a $(f_i, \tau_i)_I$
2. $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}\tau_i := \left\{f_i^{-1}(U) : i \in I, U \in \tau_i\right\}$ es subbase de τ

3. Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es una función tal que $f_i g$ es continua para toda $i \in I$, entonces g es continua.

4. Para toda $i \in I$, f_i es continua y, si conmuta el siguiente diagrama para toda $i \in I$,

   con h biyectiva y continua y g_i continua, entonces h es un homeomorfismo.

Teorema 1.2 *Si* $(f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_I$ *es un sumidero de funciones entre espacios topológicos, entonces son equivalentes*

1. τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$

2. $\tau = \left\{ U \in \wp(X) : \forall i \in I, f_i^{-1}(U) \in \tau_i \right\}$

3. Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función tal que $g f_i$ es continua para toda $i \in I$, entonces g es continua.

4. Para toda $i \in I$, f_i es continua y, si conmuta el siguiente diagrama para toda $i \in I$,

   con h biyectiva y continua y g_i continua, para toda $i \in I$, entonces h es un homeomorfismo.

Teorema 1.3 *Sean* $(f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$ *y* $(g_i : (Y, \sigma) \to (X_i, \tau_i))_I$ *dos fuentes de funciones continuas y* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *y una función continua tal que para toda* $i \in I$ *conmuta el siguiente diagrama*

entonces se satisfacen:

1. Si τ es inicial respecto a $(f_i, \tau_i)_I$, τ es inicial respecto a (f, σ).

2. Si τ es inicial respecto a (f, σ) y σ es inicial respecto a $(g_i, \tau_i)_I$, τ es inicial respecto a $(f_i, \tau_i)_I$.

Teorema 1.4 *Sean $(f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_I$ y $(g_i : (X_i, \tau_i) \to (W, \omega))_I$ dos sumideros de funciones continuas y $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ y una función continua tal que para toda $i \in I$ conmuta el siguiente diagrama*

entonces se satisfacen:

1. Si τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$, τ es final respecto a (f, ω).

2. Si τ es final respecto a (ω, f) y ω es final respecto a $(\tau_i, g_i)_I$, τ es final respecto a $(\tau_i, f_i)_I$.

1.2. Productos y coproductos

Definición 1.4 *Se dice que una fuente de funciones $(f_i : X \to X_i)_I$ cumple la* ***propiedad universal del producto*** *si dada cualquiera otra fuente de funciones $(g_i : W \to X_i)_I$ existe una única función $f : W \to X$ tal que conmuta el siguiente diagrama*

En caso de que I sea un conjunto, se dice que X es un ***producto cartesiano*** *de $(X_i)_I$ con* ***proyecciones*** *$(f_i)_I$.*

Definición 1.5 *Se dice que un sumidero de funciones $(f_i : X_i \to X)_I$ cumple la* ***propiedad universal del coproducto*** *si dado cualquier otro sumidero de funciones $(g_i : X_i \to Y)_I$*

existe una única función $g : X \to Y$ tal que conmuta el siguiente diagrama

*En caso de que I sea un conjunto, se dice que X es un **coproducto cartesiano** de $(X_i)_I$ con **coproyecciones** $(f_i)_I$.*

Teorema 1.5 *Dadas cualesquiera dos fuentes $(f_i : X \to X_i)_I$ y $(g_i : Y \to X_i)_I$ que cumplen la propiedad universal del producto (cartesiano) existe una única función $h : X \to Y$ biyectiva que hace conmutativo al diagrama*

*Debido a esto se habla de X como de **el** producto (cartesiano) de la familia $(X_i)_I$, y se denota por $\prod\limits_{i\in I} X_i$.*

Observación 1.1 *Está notación generalmente se emplea para denotar al conjunto*

$$\left\{ f \in \mathfrak{Set}\left(I, \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\right) : \forall i \in I, f(i) \in X_i \right\}$$

*Es fácil probar que la fuente (de **proyecciones canónicas**)*

$$\left(p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i\right)_I$$

donde para toda $i \in I$

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \prod\limits_{i\in I} X_i & \to & X_i \\ & f & \mapsto & f(i) \end{array}$$

cumple la propiedad universal del producto (cartesiano). Esto y el teorema anterior justifican el empleo de esta notación.

Teorema 1.6 *Dados cualesquiera dos sumideros* $(f_i : X_i \to X)_I$ *y* $(g_i : X_i \to W)_I$ *que cumplen la propiedad universal del coproducto (cartesiano) existe una única función* $h : W \to X$ *biyectiva que hace conmutativo al diagrama*

Debido a esto se habla de X *como de* ***el*** *coproducto (cartesiano) de la familia* $(X_i)_I$*, y se denota por* $\coprod_{i \in I} X_i$.

Observación 1.2 *Está notación generalmente se emplea para denotar al conjunto*

$$\bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

Es fácil probar que el sumidero (de ***coproyecciones canónicas*** *o* ***inclusiones canónicas****)*

$$\left(\iota_i : X_i \to \coprod_{i \in I} X_i \right)_I$$

donde para toda $i \in I$

$$\begin{array}{rccc} \iota_i : & X_i & \to & \coprod_{i \in I} X_i \\ & x & \mapsto & (x, i) \end{array}$$

cumple la propiedad universal del coproducto (cartesiano). Esto y el teorema anterior justifican el empleo de esta notación.

Definición 1.6 *Dado un conjunto* I*, se dice que una fuente de funciones continuas*

$$(f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$$

cumple la ***propiedad universal del producto topológico*** *si dada cualquiera otra fuente de funciones continuas* $(g_i : (W, \omega) \to (X_i, \tau_i))_I$ *existe una única función continua* $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ *tal que conmuta el siguiente diagrama*

En tal caso se dice que X *es un* ***producto topológico*** *de* $(X_i)_I$ *con* ***proyecciones*** $(f_i)_I$.

Definición 1.7 *Dado un conjunto I, se dice que un sumidero de funciones continuas*

$$(f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_I$$

cumple la ***propiedad universal del coproducto topológico*** *si dada cualquier otro sumidero de funciones continuas $(g_i : (X_i, \tau_i) \to (Y, \sigma))_I$ existe una única función continua $g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ tal que conmuta el siguiente diagrama*

En tal caso se dice que X es un ***coproducto topológico*** de $(X_i)_I$ *con* ***coproyecciones*** $(f_i)_I$.

Teorema 1.7 *Dado un conjunto I y dadas cualesquiera dos fuentes de funciones contiuas $(f_i : (X, \tau) \to (X_i, \tau_i))_I$ y $(g_i : (Y, \sigma) \to (X_i, \tau_i))_I$ que cumplen la propiedad universal del producto topológico existe un único homeomorfismo $h : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ que hace conmutativo al diagrama*

Debido a esto se habla de (X, τ) como de ***el*** producto topológico de la familia (X_i, τ_i), *y se denota por $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$.*

Teorema 1.8 *Dado un conjunto I y dados cualesquiera dos sumideros de funciones continuas $(f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau))_I$ y $(g_i : (X_i, \tau_i) \to (W, \omega))_I$ que cumplen la propiedad universal del coproducto topológico existe un único homeomorfismo $h : (W, \omega) \to (X, \tau)$ que hace conmutativo al diagrama*

Debido a esto se habla de (X, τ) como de ***el*** coproducto topológico de la familia $(X_i, \tau_i)_I$, *y se denota por $\coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$.*

Definición 1.8 *Si $(f_i : X_i \to Y_i)_I$ es una familia de funciones, el* ***producto (cartesiano)*** *de $(f_i)_I$, que denotaremos por Πf_i, es la única función que para toda $i \in I$ hace conmutativo el diagrama:*

Definición 1.9 *Si $(f_i : X_i \to Y_i)_I$ es una familia de funciones, el* ***coproducto (cartesiano)*** *de $(f_i)_I$, que denotaremos por $\coprod f_i$, es la única función que para toda $i \in I$ hace conmutativo el diagrama:*

Teorema 1.9 *El producto cartesiano de funciones continuas es continuo.*

Teorema 1.10 *El coproducto cartesiano de funciones continuas es continuo.*

Teorema 1.11 *Sea $I \times J$ un conjunto de índices. Entonces:*

$$\prod_{i \in I} \left(\prod_{k \in J} X_{(i,k)}, \tau_i \right) \cong \prod_{I \times J} \left(X_{(i,j)}, \tau_{(i,j)} \right)$$

donde τ_i es la topología inicial para $\prod\limits_{k \in J} X_{(i,k)}$ respecto de las proyecciones canónicas; y

$$\coprod_{i \in I} \left(\coprod_{k \in J} X_{(i,k)}, \tau_i \right) \cong \coprod_{I \times J} \left(X_{(i,j)}, \tau_{(i,j)} \right)$$

donde τ_i es la topología final para $\coprod\limits_{k \in J} X_{(i,k)}$ respecto de las inclusiones canónicas.

Teorema 1.12 *Dados $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$ y $(X_i)_I$ una partición de X en conjuntos abiertos, se tiene que:*

$$(X, \tau) \cong \coprod_{i \in I} (X_i, \tau \mid_{X_i})$$

Observación 1.3 *Para simplificar la notación, y dado que la proyección canónica*

$$\begin{array}{rlcl} p: & \coprod_{i\in I} (X_i, \tau\mid_{X_i}) & \to & (X,\tau) \\ & (x, X_i) & \mapsto & x \end{array}$$

es un homeomorfismo, no se hará distinción entre ambos espacios.

Definición 1.10 *Una función continua $s:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ se llama* ***sección*** *en $\mathfrak{Top}$ si existe $r:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ continua tal que $rs=1_X$.*

Definición 1.11 *Una función continua $r:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ se llama* ***retracción*** *en $\mathfrak{Top}$ si existe $s:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ continua tal que $rs=1_Y$.*

Definición 1.12 *Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ se llama* ***inmersión*** *si es inyectiva y τ es inicial respecto a (f,σ).*

Definición 1.13 *Una función $p:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ se llama* ***identificación*** *si es suprayectiva y σ es final respecto a (τ,f).*

Teorema 1.13 *Toda sección es una inmersión.*

Teorema 1.14 *Toda retracción es un identificación.*

1.3. Fibraciones

Definición 1.14 *Un espacio topológico (X,τ) es* ***totalmente inconexo por trayectorias*** *si para toda $x\in X$, la componente por trayectorias de x es $\{x\}$.*

Observación 1.4 *I denotará al intervalo $[0,1]$ con su topología usual.*

Proposición 1.3 *Dado $(X,\tau)\in\mathfrak{Top}$, son equivalentes:*

(i) (X,τ) es totalmente inconexo por trayectorias.
(ii) Si $f\in\mathfrak{Top}\,(I,(X,\tau))$, entonces f es constante.

Definición 1.15 *Dado $\{f,g\}\subseteq\mathfrak{Top}\,((X,\tau),(Y,\sigma))$, se dice que f* ***es homotópica a*** *g ($f\simeq g$) si existe $H\in\mathfrak{Top}\,((X,\tau)\times I,(Y,\sigma))$ tal que:*

$$H\mid_{X\times\{0\}}=f \quad\wedge\quad H\mid_{X\times\{1\}}=g$$

En este caso H ***es una homotopía entre*** *f y g, ($f\overset{H}{\simeq}g$ o $H:f\simeq g$).*

Definición 1.16 *Se dice que dos espacios topológicos* $(X,\tau),(Y,\sigma)$ ***son del mismo tipo de homotopía*** *(*$(X,\tau)\simeq(Y,\sigma)$*) si existen*

$$f\in\mathfrak{Top}\left((X,\tau),(Y,\sigma)\right)\quad\wedge\quad g\in\mathfrak{Top}\left((Y,\sigma),(X,\tau)\right)$$

tales que

$$gf\simeq 1_{(X,\tau)}\quad\wedge\quad fg\simeq 1_{(Y,\sigma)}$$

En tal caso se dice que f *y* g *son* ***equivalencias homotópicas****.*

Definición 1.17 *Un espacio topológico* (X,τ) *es* ***contraíble*** *si* $1_{(X,\tau)}$ *es homotópica a una constante.*

Definición 1.18 *Dados* $\{f,g\}\subseteq\mathfrak{Top}\left((X,\tau),(Y,\sigma)\right)$ *y* $A\subseteq X$*, se dice que* f ***es homotópica a*** g ***relativa a*** A *(*$f\simeq g\ relA$*) si existe* $H\in\mathfrak{Top}\left((X,\tau)\times I,(Y,\sigma)\right)$ *tal que:*

$$H\mid_{X\times\{0\}}=f\quad\wedge\quad H\mid_{X\times\{1\}}=g\quad\wedge\quad H\mid_{A\times I}=f\mid_A$$

Definición 1.19 *Se dice que* $f\in\mathfrak{Top}\left((X,\tau),(Y,\sigma)\right)$ ***tiene la propiedad del levantamiento (único) de homotopías respecto a un espacio topológico*** (W,ω) *si, dado el siguiente diagrama:*

donde para toda $w\in W, h_0(w)=(w,0)$*, existe (exactamente una)* $\widetilde{H}\in\mathfrak{Top}\left((X,\tau)\times I,(Y,\sigma)\right)$ *tal que*

En tal caso, la aplicación $\widetilde{H}$ *se llama* ***levantamiento de*** H ***que empieza con*** g*.*

Definición 1.20 *Una función continua* $p:(E,\varepsilon)\to(B,\beta)$ *se llama* ***fibración de Hurewicz*** *si* p *tiene la propiedad del levantamiento de homotopías respecto a cualquier espacio topológico.*

Proposición 1.4 *Toda aplicación cubriente es una fibración de Hurewicz.*

Proposición 1.5 *Si (B,β) es totalmente inconexo por trayectorias y $b \in B$, entonces $\{b\} \hookrightarrow B$ es una fibración de Hurewicz.*

Proposición 1.6 *Si (B,β) y (F,φ) son espacios topológicos, entonces la proyección $p : (B,\beta)\times(F,\varphi)\to(B,\beta)$ es una fibración de Hurewicz que se llama **fibración trivial**.*

Definición 1.21 *Dados $f \in \mathfrak{Top}\left((X,\tau),(Y,\sigma)\right)$ y $y \in Y$, la fibra de f sobre y es $\left(f^{-1}(y), \tau\mid_{f^{-1}(y)}\right)$.*

Observación 1.5 *Las fibras de la fibración trivial $p:(B,\beta)\times(F,\varphi)\to(B,\beta)$ son homeomorfas a (F,φ), por lo tanto, si (F,φ) no es discreto, entonces p no es aplicación cubriente.*

Definición 1.22 *Se dice que una fibración de Hurewicz $p:(E,\varepsilon)\to(B,\beta)$ tiene la **propiedad del levantamiento único de trayectorias** si dadas $\omega_1,\omega_2 \in \mathfrak{Top}\left(I,(E,\varepsilon)\right)$ se tiene que:*

$$\left(p\omega_1 = p\omega_2 \quad \wedge \quad \omega_1(0)=\omega_2(0)\right) \Rightarrow (\omega_1=\omega_2)$$

Teorema 1.15 *Si $p:(E,\varepsilon)\to(B,\beta)$ es una fibración de Hurewicz, entonces son equivalentes:*

$(\cdot)$ p tiene la propiedad del levantamiento único de trayectorias.

$(\cdot\cdot)$ Dados (Y,σ) conexo por trayectorias, $f,g \in \mathfrak{Top}\left((Y,\sigma),(E,\varepsilon)\right)$, $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0)=g(y_0)$ y $pf=pg$, entonces $f=g$.

$(\cdot\cdot\cdot)$ p tiene la propiedad del levantamiento único de homotopía.

$(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ Para toda $b\in B$, $p^{-1}(b)$ es totalmente inconexo por trayectorias.

Corolario 1.1 *Si $p:(E,\varepsilon)\to(B,\beta)$ es una fibración de Hurewicz con la propiedad del levantamiento único de trayectorias y ω_1,ω_2 son tales que $\omega_1(0)=\omega_2(0)$ y $p\omega_1\simeq p\omega_2$ rel $\{0,1\}$, entonces $\omega_1\simeq\omega_2$ rel $\{0,1\}$.*

Proposición 1.7 *La composición de fibraciones de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias) es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias).*

Teorema 1.16 *Si $p\in\mathfrak{Top}\left((E,\varepsilon),(B,\beta)\right)$y (E,ε) es localmente conectable por trayectorias, entonces son equivalentes:*

$(\cdot)$ p es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias).

$(\cdot\cdot)$ Para cada componente por trayectorias C de (E,ε), $p\mid_C^{p(C)}$ es fibración de Hurewicz (con la propiedad del levantamiento único de trayectorias) y $p(C)$ es componente por trayectorias de (B,β).

1.4. Espacios de funciones

Definición 1.23 *Dados* $(X,\tau),(Y,\sigma)\in\mathfrak{Top}$, $A\subseteq X$ *y* $B\subseteq Y$, *se define:*

$$(A,B):=\{f\in\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma)):f(A)\subseteq B\}$$

Definición 1.24 *La* ***topología compacto abierta*** *para* $\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$, *que será denotada por* κ, *es la que tiene por subbase a:*

$$\beta:=\left\{(K,U)\in\mathsf{Pot}(\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))):U\in\sigma\quad\wedge\quad(K,\tau\mid_K)\ \text{es compacto}\right\}$$

El espacio $(\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma)),\kappa)$ *será denotado por* $\mathfrak{Top}_\kappa((X,\tau),(Y,\sigma))$.

Definición 1.25 *Dados* $X,Y,Z\in\mathfrak{Set}$, *se definen:*

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathfrak{Set}(X\times Y,Z) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}(X,\mathfrak{Set}(Y,Z))\\ & f:X\times Y\to Z & \longmapsto & \varphi(f):X\to\mathfrak{Set}(Y,Z)\end{array}$$

donde $[\varphi(f)](x)=f\mid_{\{x\}\times Y}$ *y*

$$\begin{array}{rccc}\psi: & \mathfrak{Set}(X,\mathfrak{Set}(Y,Z)) & \longrightarrow & \mathfrak{Set}(X\times Y,Z)\\ & g:X\to\mathfrak{Set}(Y,Z) & \longmapsto & \psi(g):X\times Y\to Z\end{array}$$

donde $[\psi(g)](x,y)=[g(x)](y)$.

Proposición 1.8 *Dados* $X,Y,Z\in\mathfrak{Set}$, *se satisfacen:*

$$\psi\varphi=1_{\mathfrak{Set}(X\times Y,Z)}\quad\wedge\quad\varphi\psi=1_{\mathfrak{Set}(X,\mathfrak{Set}(Y,Z))}$$

Proposición 1.9 *Dados* $(X,\tau),(Y,\sigma),(Z,\zeta)\in\mathfrak{Top}$, *si* (Y,σ) *es localmente compacto y regular, entonces:*

$$\varphi:\mathfrak{Top}((X,\tau)\times(Y,\sigma),(Z,\zeta))\longrightarrow\mathfrak{Top}((X,\tau),\mathfrak{Top}_\kappa((Y,\sigma),(Z,\zeta)))$$

es biyectiva.

Observación 1.6 *Como* I *es localmente compacto y regular, entonces:*

$$\varphi:\mathfrak{Top}((X,\tau)\times I,(Z,\zeta))\longrightarrow\mathfrak{Top}((X,\tau),\mathfrak{Top}_\kappa(I,(Z,\zeta)))$$

es biyectiva.

Observación 1.7 *Dado* $t\in I$, *la proyección al factor* t *de* $\mathfrak{Top}_\kappa(I,(Z,\zeta))$ *es continua.*

Observación 1.8 *Dados* $(X,\tau),(Y,\sigma)\in\mathfrak{Top}$ *y* $f\in\mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$, *entonces* $\Pi f\in\mathfrak{Set}(\mathfrak{Top}_\kappa(I,(X,\tau)),\mathfrak{Top}_\kappa(I,(Y,\sigma)))$ *es continua. Cabe aclarar que* Πf *no es precisamente el producto de funciones, sino la restricción de dicho producto al dominio correspondiente, pero se denotará de esta forma por simplificar la notación.*

Capítulo 2

Subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$

Puede pensarse a la Topología como el estudio de las propiedades que se preservan bajo transformaciones continuas. Bajo esta idea, el asociar a cada una de estas propiedades una clase de espacios topológicos podría ayudar a entenderlas y clasificarlas.

Las subcategorías correflexivas logran en cierto modo esto, y tal vez el origen de su estudio sea precisamente ese.

A continuación se presentan las definiciones de dichas clases, algunos resultados y dos ejemplos.

2.1. Definiciones

Definición 2.1 *Una **subcategoría cerrada de** $\mathfrak{Top}$ es una clase $\underline{\mathbf{A}}$ de espacios topológicos cerrada bajo homeomorfismos, es decir, la familia $\underline{\mathbf{A}}$ es tal que*

$$((A,\alpha) \in \underline{\mathbf{A}} \wedge (B,\beta) \cong (A,\alpha)) \Rightarrow (B,\beta) \in \underline{\mathbf{A}}$$

*Los elementos de la subcategoría cerrada $\underline{\mathbf{A}}$ se llaman $\underline{\mathbf{A}}$**-espacios.***

Observación 2.1 *En realidad se está pensando en subcategorías plenas y repletas de $\mathfrak{Top}$, que por simplicidad se llamarán subcategorías cerradas; esto permite pensar a cada subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$ como una propiedad topológica y viceversa.*

Definición 2.2 *Dada $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$, una $\underline{\mathbf{A}}$**-correflexión de un espacio topológico** (X,τ) es una función continua $c : (A,\alpha) \to (X,\tau)$ que satisface: (i) $(A,\alpha) \in \underline{\mathbf{A}}$; (ii) Para toda $(A',\alpha') \in \underline{\mathbf{A}}$ y para toda $f \in \mathfrak{Top}((A',\alpha'),(X,\tau))$, existe una, y solamente una, $g \in \mathfrak{Top}((A',\alpha'),(A,\alpha))$ tal que $cg = f$. Es decir, se tiene el siguiente* *diagrama:*

*En tal caso se dice que (X, τ) es **$\underline{\mathbf{A}}$-correflejable** y que (A, α) es su **$\underline{\mathbf{A}}$-correflector**.*

Ejemplo 2.1 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$ y (A, α) es cualquier $\underline{\mathbf{A}}$-espacio, se tiene que la función*

$$\begin{array}{rccc} 1_A: & (A, \alpha) & \to & (A, \alpha) \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (A, α).

Definición 2.3 *Si la subcategoría cerrada $\underline{\mathbf{A}}$ es tal que cualquier espacio topológico (X, τ) es $\underline{\mathbf{A}}$-correflejable, entonces se dice que $\underline{\mathbf{A}}$ es una **subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.***

Proposición 2.1 *El $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de un espacio (X, τ) es único salvo homeomorfismos.*

Demostración: Sean c y c' $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de (X, τ). Entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos

donde h y h' son las funciones continuas únicas que existen por ser (A, α) y (A', α') $\underline{\mathbf{A}}$-correflectores. Siendo así, la composición $h'h$ es una función continua de (A, α) en (A, α) tal que

$$c\,(h'h) = (ch')\,h = c'h = c$$

por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

Por lo tanto
$$h'h = 1_A.$$
Análogamente se puede probar que $hh' = 1_{A'}$. Por lo tanto, h es un homeomorfismo.

Proposición 2.2 *Todo espacio homeomorfo al $\underline{\mathbf{A}}$-correflector del espacio (X, τ) es también un $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de (X, τ).*

Demostración: Sea (A, α) un $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de (X, τ) y sea $h : (A', \alpha') \to (A, \alpha)$ un homeomorfismo.

Sea $f : (B, \beta) \to (X, \tau)$ cualquier función continua, con $(B, \beta) \in \underline{\mathbf{A}}$; entonces existe una función continua única $g : (B, \beta) \to (A, \alpha)$ tal que $cg = f$. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

en el cual vemos que:
$$(ch)\left(h^{-1}g\right) = c\left(hh^{-1}\right)g = f$$
es decir, ch es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión, pues $h^{-1}g$ es única por la unicidad de g.♦

Proposición 2.3 $\underline{\{(\emptyset, \{\varnothing\})\}}$*es la mínima subcategoría correflexiva de* $\mathfrak{Top}$.

Demostración Para cualquier espacio topológico (X, τ) se tiene el siguiente diagrama:

del cual queda claro que $\underline{\{(\emptyset, \{\varnothing\})\}}$ es una subccategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Que es mínima, se sigue de que el único correfelctor del espacio $(\emptyset, \{\varnothing\})$ es él mismo.♦

Observación 2.2 *En adelante se denotará a* $\underline{\{(\emptyset, \{\varnothing\})\}}$ *como* $\underline{\{\emptyset\}}$*, a fin de simplificar la notación.*

2.2. Subcategorías bicorreflexivas

Teorema 2.1 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es cualquier subcategoría correflexiva con elementos no vacíos, entonces toda $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión debe ser biyectiva. En este caso se dice que la subcategoría $\underline{\mathbf{A}}$* ***es una subcategoría bicorreflexiva.***

Demostración. Dados $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$, $c : (A,\alpha) \to (X,\tau)$ una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ) y $(B,\beta) \in \underline{\mathbf{A}}$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo para cualquier $f \in \mathfrak{Top}\left((B,\beta),(X,\tau)\right)$

Si $X = \varnothing$ entonces $c = \phi$ y por tanto biyectiva.

De otro modo, si $x \in X$ y f es tal que $f(b) = x$ para toda $b \in B$, entonces f es continua y:

$$\forall b \in B, c\left(g\left(b\right)\right) = f\left(b\right) = x$$

Por lo tanto, c es suprayectiva.

Si $a_1, a_2 \in A$ son tales que $c(a_1) = c(a_2)$ y f tal que $f(b) = c(a_1)$ para toda $b \in B$, entonces, como f es continua, g debe ser única y tal que:

$$c\left(g\left(b\right)\right) = f\left(b\right) = c\left(a_i\right), \text{ para } i \in \{1,2\}$$

Defínase

$$\begin{array}{llll} g_i : & (B,\beta) & \to & (A,\alpha) \\ & b & \mapsto & a_i \end{array}$$

y nótese que g_i es continua y satisface

$$\forall b \in B, c\left(g_i\left(b\right)\right) = f\left(b\right), \text{ para } i \in \{1,2\}$$

Entonces $g_1 = g_2$, y por tanto $a_1 = a_2$, por lo cual c es inyectiva.♦

Debido a lo anterior, en adelante se llamarán *subcategorías bicorreflexivas* a las subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos ya que, según se ha visto, en ellas todas las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones son biyectivas.

Observación 2.3 *Si $\underline{\mathbf{A}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) es cualquier espacio topológico, entonces una de las $\underline{\mathbf{A}}$-correflexiones de (X,τ) es de la forma 1_X.*

Demostración. Supóngase que

$$c : (A,\alpha) \to (X,\tau)$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ), sea

$$\tau' = \{V \in \mathsf{Pot}\,(X) : \exists U \in \alpha, c\,(U) = V\}$$

Como c es biyectiva, τ' es una topología para X y

$$c^{-1} : (X,\tau') \to (A,\alpha)$$

se vuelve continua pues τ' es en realidad la topología inicial para X correspondiente a $c^{-1} : X \to (A,\alpha)$ y a α, es decir,

$$\tau' = \left\{V \in \mathsf{Pot}\,(X) : \exists U \in \alpha, \left(c^{-1}\right)^{-1}(U) = V\right\} = \{V \in \mathsf{Pot}\,(X) : \exists U \in \alpha, c\,(U) = V\}$$

En consecuencia,

$$c^{-1} : (X,\tau') \to (A,\alpha)$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $(X,\tau') \in \underline{\mathbf{A}}$ y, por la proposición 2.2,

$$cc^{-1} = 1_X$$

es una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión de (X,τ).♦

Teorema 2.2 *La subcategoría cerrada de los espacios discretos es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbb{D}}$ la subcategoría cerrada de los espacios discretos.

(a) $\underline{\mathbb{D}}$ *es bicorreflexiva:* Se tiene el siguiente diagrama:

donde cada función es continua, pues el dominio es discreto. Además $\underline{\mathbb{D}}$ tiene elementos no vacíos; por lo tanto es bicorreflexiva.

(b) $\underline{\mathbb{D}}$ *es la mínima bicorreflexiva:* Sea $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y (X,τ) cualquier espacio discreto. Entonces existe una $\underline{\mathbf{A}}$-correflexión

$$c : (A,\alpha) \to (X,\tau)$$

que, como se sabe, es continua y biyectiva. Como (X,τ) es discreto, también c^{-1} es continua; por lo tanto c es un homeomorfismo y $(X,\tau) \in \underline{\mathbf{A}}$. Por lo tanto, $\underline{\mathbb{D}} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$.♦

Ahora es posible, a través de un par de ejemplos, ilustrar una técnica para asociar una subcategoría correflexiva de Top a una propiedad que se preserva bajo funciones continuas.

2.3. Espacios finitamente generados

Definición 2.4 *Un espacio topológico (X, τ) está* ***finitamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X, τ). Es decir, τ es la topología más fina para X que hace continuas a las inclusiones de los subespacios finitos de (X, τ).*

Ejemplo 2.2 *Todo espacio discreto está finitamente generado.*

En efecto, las inclusiones son continuas y $\tau = \sup \mathfrak{Top}\,[X]$. ♦

Ejemplo 2.3 *Todo espacio indiscreto está finitamente generado.*

En efecto, sea τ la topología indiscreta para X y considérese el sumidero

$$(\iota_i : (X_i, \tau_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

de inclusiones de los subespacios finitos de (X, τ). Hay que probar que en este caso la topología final para X, τ', correspondiente a $(\tau_i)_I$ y a $(\iota_i)_I$ es la indiscreta. Para ello se procederá por reducción al absurdo suponiendo que hay un subconjunto propio de X, no vacío y miembro de τ'. Sea U tal subconjunto de X; entonces

$$\forall i \in I, \iota_i^{-1}(U) \in \tau_i$$

Por ser no vacío existe al menos un $x \in U$. Por ser subconjunto propio, tampoco $X - U$ es vacío, por lo que existe $y \in X - U$; entonces $x \neq y$ y el subespacio de X

$$\left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right)$$

es un subespacio finito (e indiscreto) y miembro de la familia $(X_i, \tau_i)_I$ de subespacios finitos de (X, τ). Sin embargo, para la inclusión correspondiente

$$\iota : \left(\{x, y\}, \tau\left|_{\{x,y\}}\right.\right) \hookrightarrow (X, \tau)$$

se tiene que

$$\iota^{-1}(U) = \{x\} \notin \tau\left|_{\{x,y\}}\right.$$

lo cual contradice el hecho de que U es miembro de la topología final. Luego $U = X$, lo que significa que τ es la topología final. Por lo tanto

$$(\iota_i : (X_i, \tau_i) \hookrightarrow (X, \tau))_I$$

es final y (X, τ) está finitamente generado.♦

Teorema 2.3 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
(a) (X, τ) está finitamente generado.
(b) Las intersecciones arbitrarias de abiertos son abiertas.
(c) Las uniones arbitrarias de cerrados son cerradas.
(d) Si $(A_i)_I$ es cualquier familia de subconjuntos de X, entonces

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos abiertos de (X,τ) y sea $A = \underset{i\in I}{\cap} A_i$. Por (a),

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap F \in \tau\,|_F$$

para todo subconjunto F de X que sea finito. En consecuencia, para cada F que se fije, se tiene que

$$A \cap F = \underset{i\in I}{\cap} (A_i \cap F)$$

es una intersección finita de abiertos de F (posiblemente de muchos intersectandos repetidos). Luego,

$$\forall F, (F \subseteq X \ \wedge F \text{ finito}) \Rightarrow (A \cap F \in \tau\,|_F\,)$$

Por lo tanto, $A \in \tau$.
$(b) \Rightarrow (a)$: Hay que probar que es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios finitos de (X,τ)

$$\mathcal{S} = \left(\iota_F : (F, \tau\,|_F\,) \hookrightarrow (X,\tau)\right)_{\mathsf{Pot}_F(X)}$$

donde

$$\mathsf{Pot}_F\,(X) = \{F \in \mathsf{Pot}\,(X) : F \text{ es finito}\}$$

para lo cual basta demostrar que si $U \subseteq X$ es tal que $U \cap F \in \tau\,|_F$ para todo $F \in \mathsf{Pot}_F\,(X)$, entonces $U \in \tau$. Escójase U con esas características y un punto $x \in U$. Por (b), x posee una vecindad abierta mínima $V\,(x)$ según τ; a saber:

$$V\,(x) = \cap\,\{W \in \tau : x \in W\}$$

Ahora bien, si ocurriese que $V\,(x) - U \neq \varnothing$, entonces se podría escoger

$$y \in V\,(x) - U$$

y formar el subespacio finito $\{x,y\}$. Entonces

$$U \cap \{x,y\} = \{x\} \in \tau\,\Big|_{\{x,y\}}$$

lo cual implicaría que este abierto relativo $\{x\}$ debería producirse también al intersectar el abierto absoluto más chico que contiene a x con $\{x,y\}$. Pero esto sería falso, porque $V\,(x) \cap \{x,y\} = \{x,y\}\ \underset{\circ}{\nabla}$. Por lo tanto, $V\,(x) \subseteq U$; por lo que, $U \in \tau$ y $\mathcal{S}$ es final.
$(b) \Rightarrow (c)$: Sea $(A_i)_I$ cualquier familia de subconjuntos cerrados de (X,τ) y sea $A = \underset{i\in I}{\cup} A_i$. Por (b),

$$X - A = \underset{i\in I}{\cap} (X - A_i) \in \tau$$

Por lo tanto, A es cerrado.
$(c) \Rightarrow (d)$: Sea $(A_i)_I$ una familia arbitraria de subconjuntos de (X,τ). Claramente,

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \overline{\underset{i\in I}{\cup} A_i},\ \forall i \in I$$

por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

Tomando cerraduras y aplicando (c) se obtiene

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$$

que es lo que se quería.
$(d) \Rightarrow (b)$: Sea $(A_i)_I$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos de (X, τ) y sea

$$A = \bigcap_{i\in I} A_i$$

Por (d),

$$\overline{X - A} = \bigcup_{i\in I} \overline{X - A_i}$$

pero

$$\overline{X - A_i} = X - A_i$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i\in I} \overline{X - A_i} = \bigcup_{i\in I} X - A_i = X - A$$

O sea que $X - A$ es cerrado y A es abierto, como se quería probar.♦

Proposición 2.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau' = \{U \in \mathsf{Pot}(X) : \forall F \in \mathsf{Pot}_F(X), U \cap F \in \tau|_F\}$$

donde

$$\mathsf{Pot}_F(X) = \{F \in \mathsf{Pot}(X) : F \text{ es finito}\}$$

entonces τ' es una topología para X y es más fina que τ.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_F : (F, \tau|_F) \hookrightarrow X)_{\mathsf{Pot}_F(X)}$$

τ hace continua a cada inclusión y τ' es final. Por lo tanto

$$\tau \subseteq \tau'.\blacklozenge$$

Proposición 2.5 *Sean (X, τ) un espacio topológico arbitrario y*

$$\tau' = \{U \in \mathsf{Pot}(X) : \forall F \in \mathsf{Pot}_F(X), U \cap F \in \tau|_F\}$$

Entonces:
(a) *(X, τ') está finitamente generado.*
(b) *Si $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es continua y (W, ω) está finitamente generado, entonces*

$$f : (W, \omega) \to (X, \tau')$$

es continua.

Demostración de (a). (X, τ') está finitamente generado porque el sumidero

$$S = (\iota_F : (F, \tau' |_F) \hookrightarrow (X, \tau'))_{\mathsf{Pot}_F(X)}$$

es final.

Demostración de (b). Sea $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ una función continua cuyo dominio (W, ω) está finitamente generado, entonces el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_F : (F, \omega |_F) \hookrightarrow (W, \omega))_{\mathsf{Pot}_F(W)}$$

es final. Por otro lado, debido a la continuidad de la función $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$, para toda $F \in \mathsf{Pot}_F(W)$ resulta continua la restricción

$$f \left|_{F}^{f(F)} \right. : (F, \omega |_F) \to \left(f(F), \tau |_{f(F)}\right)$$

Pero $F \in \mathsf{Pot}_F(W)$ implica $f(F) \in \mathsf{Pot}_F(X)$; entonces como consecuencia de la definición de τ', para todo $F \in \mathsf{Pot}_F(W)$ resulta continua la inclusión

$$(\iota)_{f(F)} : \left(f(F), \tau |_{f(F)}\right) \to (X, \tau')$$

Entonces, puesto que el diagrama

conmuta para todo $F \in \mathsf{Pot}_F(W)$, resulta que la composición

$$\left(f(F), \tau |_{f(F)}\right) \xrightarrow{\iota_F} (W, \omega) \xrightarrow{f} (X, \tau')$$

es continua, para todo $F \in \mathsf{Pot}_F(W)$. Esto implica, debido a la finalidad de ω respecto a $(\iota_F)_{\mathsf{Pot}_F(W)}$ y a $(\omega |_F)_{\mathsf{Pot}_F(W)}$, y al teorema 1.2, que

$$f : (W, \omega) \to (X, \tau')$$

es continua, como se quería demostar.♦

Como corolario de los dos últimos resultados se tiene que a un espacio topológico arbitrario (X, τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología τ' que lo hace un espacio finitamente generado; este nuevo espacio (X, τ') es llamado ***espacio finitamente generado asociado a*** (X, τ).

Corolario 2.1 *La clase de los espacios finitamente generados es una subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *que denotaremos por* $\underline{\mathbb{F}}$.

2.4. Espacios compactamente generados.

Definición 2.5 *Un espacio topológico (X,τ) se dice que está* ***compactamente generado*** *si es final el sumidero de inclusiones de la familia de subespacios compactos de (X,τ).*[1]

Proposición 2.6 *Si (X,τ) es cualquier espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X,τ) está compactamente generado.
(b) $U \in \tau \Leftrightarrow \forall K \in \mathsf{Pot}(X), (K$ es compacto en $(X,\tau) \Rightarrow U \cap K \in \tau|_K)$

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sea $(K_i)_I$ la familia de subespacios compactos de (X,τ); por (a), es final el sumidero

$$\left(\iota_i : (K_i, \tau|_{K_i}) \hookrightarrow (X,\tau)\right)_I$$

Por lo tanto

$$U \in \tau \Leftrightarrow \forall i \in I, \iota_i^{-1}(U) \in \tau|_{K_i}$$

es decir

$$U \in \tau \Leftrightarrow \forall i \in I, U \cap K_i \in \tau|_{K_i}$$

$(b) \Rightarrow (a)$: De acuerdo a la definición de sumidero final, (b) significa que τ es la topología final corespondiente a $(\iota_i)_I$ y $(\tau|_{K_i})_I$. Por lo tanto, el sumidero

$$\left(\iota_i : (K_i, \tau|_{K_i}) \hookrightarrow (X,\tau)\right)_I$$

es final y (X,τ) está compactamente generado.♦

Ejemplo 2.4 *Todo espacio finitamente generado está compactamente generado.*

En efecto, sea $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ finitamente generado y $(K_i)_I$ la familia de los subespacios compactos de (X,τ). Sea $U \subseteq X$ tal que:

$$\forall i \in I, U \cap K_i \in \tau|_{K_i}$$

En particular, dado que cualquier subespacio finito de (X,τ) es compacto, se tiene que

$$\forall F \in \mathsf{Pot}_F(X), U \cap F \in \tau|_F$$

Por tanto $U \in \tau$ y, por la proposición anterior, (X,τ) está compactamente generado.♦

Proposición 2.7 *Sea (X,τ) un espacio topológico arbitrario. Si*

$$\tau_\varkappa = \{U \in \mathsf{Pot}(X) : \forall K \in \mathsf{Pot}_K(X,\tau), U \cap K \in \tau|_K\}$$

donde

$$\mathsf{Pot}_K(X,\tau) = \{K \in \mathsf{Pot}(X) : K \text{ es compacto}\}$$

entonces $\varkappa$ es una topología para X más fina que τ.

[1] En la terminología antigua este concepto recibía el nombre de K-espacio.

Demostración. Considérese el sumidero de inclusiones

$$S = (\iota_K : (K, \tau\,|_K) \hookrightarrow X)_{K \in \mathsf{Pot}_K(X,\tau)}$$

τ hace continua a cada inclusión y $\varkappa$ es final. Por lo tanto

$$\tau \subseteq \varkappa.\blacklozenge$$

Corolario 2.2 *Si (X, τ) es cualquier espacio topológico y $\varkappa$ es la topología para X de la proposición anterior, entonces $(K, \tau\,|_K)$ es compacto en (X, τ) si, y sólo si, $(K, \varkappa\,|_K)$ es compacto en $(X, \varkappa)$.*

Demostración. Si $(K, \tau\,|_K)$ es compacto en (X, τ) y $(U_j)_J \subseteq \varkappa$ es una cubierta de K; entonces, de acuerdo con la definición de $\varkappa$, para toda $j \in J$ se tiene que

$$U_j \cap K \in \tau\,|_K$$

En consecuencia, para toda $j \in J$ existe $V_j \in \tau$ tal que

$$V_j \cap K = U_j \cap K$$

Entonces

$$K = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap K) = \bigcup_{j \in J} (V_j \cap K)$$

Esto implica que $(V_j)_J$ es una cubierta abierta de K según τ y, por consiguiente, puede extraerse de ella una subcubierta finita $(V_j)_{J_0}$ de $(V_j)_J$. Pero entonces

$$K = \left(\bigcup_{j \in J_0} V_j \right) \cap K = \bigcup_{j \in J_0} (V_j \cap K) = \bigcup_{j \in J_0} (U_j \cap K)$$

lo cual significa que $(U_j)_{J_0}$ es una subcubierta fnita de $(U_j)_J$. Por lo tanto $(K, \varkappa\,|_K)$ es compacto en $(X, \varkappa)$.

Recíprocamente, puesto que por la proposición anterior $\varkappa$ es más fina que τ, se tiene que

$$1_X : (X, \varkappa) \to (X, \tau)\,;$$

es continua; por lo tanto cualquier compacto K de $(X, \varkappa)$ es aplicado por 1_X en un compacto de (X, τ), pero ese compacto es K; por lo que K es compacto en (X, τ).$\blacklozenge$

Proposición 2.8 *Sea (X, τ) cualquier espacio topológico. Si $\varkappa$ es la topología para X de la proposición 2.7, entonces:*
(a) $(X, \varkappa)$ está compactamente generado.
(b) Si $f : (W, \omega) \to (X, \tau)$ es cualquier función continua, donde (W, ω) está compactamente generado, entonces $f : (W, \omega) \to (X, \varkappa)$ es continua.

Demostración de (a). De acuerdo con la definición de $\varkappa$, es final el sumidero de inclusiones de los subespacios compactos de (X,τ), es decir:

$$\iota_K : \left((K, \tau\left|_K\right.) \hookrightarrow (X, \varkappa)\right)_{K \in \mathsf{Pot}_K(X,\tau)}$$

es un sumidero final; por lo tanto $(X,\varkappa)$ está compactamente generado, pues $\mathsf{Pot}_K(X,\tau) = \mathsf{Pot}_K(X,\varkappa)$.

Demostración de (b). La prueba es análoga a la de la proposición 2.5 ♦

Obsérvese nuevamente la importancia de estos dos últimos resultados al asegurar que a un espacio topológico arbitrario (X,τ) se le puede dotar siempre de una nueva topología $\varkappa$ que lo haga un espacio compactamente generado, a este nuevo espacio $(X,\varkappa)$ se le suele denotar por $\langle X \rangle$ y es llamado *el espacio compactamente generado asociado a* (X,τ).

Corolario 2.3 *La clase de los espacios compactamente generados es una subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *que denotaremos por* $\underline{\mathbb{K}}$.

Enseguida se verán algunos ejemplos de espacios que están compactamente generados.

Ejemplo 2.5 *Todo espacio topológico localmente compacto está compactamente generado.*

En efecto, sea $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ con la propiedad anterior. Sea $U \subseteq X$ tal que

$$\forall K \in \mathsf{Pot}_K(X,\tau), U \cap K \in \tau\left|_K\right.$$

Sea $x \in U$ y sea K_0 una vecindad compacta de x; entonces

$$x \in U \cap K_0 \in \tau\left|_{K_0}\right.$$

Por tanto

$$\exists V \in \tau \ni V \cap K_0 = U \cap K_0$$

Entonces

$$x \in U \cap K_0 = V \cap K_0 \subseteq U$$

y como tanto K_0 como V son vecindades de x, entonces $K_0 \cap V$ es una vecindad de x contenida en U; por tanto $U \in \tau$.♦

Teorema 2.4 *Sea* (X,τ) *cualquier espacio topológico; son equivalentes:*
a) (X,τ) *está compactamente generado.*
b) Si $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *es una función tal que* $f\left|_K\right. : K \to (Y,\sigma)$ *es continua, para todo subespacio compacto* K *de* (X,τ), *entonces* f *es continua en* (X,τ).

Demostración. Se tiene el siguiente diagrama

el cual muestra que τ es final respecto de $\left(\tau\left|_K\right., \iota_K\right)_{\mathsf{Pot}_K(X,\tau)}$.♦

2.5. Subcategoría correflexiva inducida por una propiedad

Los dos ejemplos anteriores ilustran una técnica para generar subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ a partir de una propiedad dada, siempre que ésta se preserve bajo funciones continuas.

La subcategoría correflexiva $\mathbb{S}_\wp$ será la familia de espacios cuyas topologías sean finales respecto del sumidero de inclusiones de los subespacios que satisfacen la propiedad $\wp$. El correflejo de un espacio topológico (X,τ) será un espacio $(X,\tau_\wp)$ con el mismo conjunto subyacente X, estructurado por una topología $\tau_\wp$ que satisfaga las tres condiciones siguientes: Que sea más fina que la topología original (i.e. $\tau \subseteq \tau_\wp$), que al topologizar a X dé lugar a un espacio que pertenezca a la subcategoría (i.e. $(X,\tau_\wp) \in \mathbb{S}_\wp$), y que sea la mínima que satisfaga estas dos condiciones.

A continuación se define y construye lo antes mencionado:

Definición 2.6 *Una **propiedad** $\wp$ es una familia de espacios topológicos, es decir, $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$.*

Definición 2.7 *Se dice que $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ **tiene la propiedad** $\wp$ si y solamente si $(X,\tau) \in \wp$.*

Ahora se define a la familia de subespacios de un espacio dado que tienen la propiedad y a la topología que es coherente con cada uno de ellos, y que resulta ser una identificación bajo la proyección canónica.

Definición 2.8 *Dados $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ y $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ una propiedad, se define:*

$$\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau) := \{P \in \mathsf{Pot}(X) : (P, \tau|_P) \in \wp\}$$

y

$$\tau_\wp := \{U \in \mathsf{Pot}(X) : \forall P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau), P \cap U \in \tau|_P\}$$

Observación 2.4 *La proyección canónica*

$$\begin{array}{rccl} p: & \coprod\limits_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)} (P,\tau|_P) & \to & (X,\tau_\wp) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

es una identificación.

Al ser $(X,\tau_\wp)$ un espacio de identificación, $\tau|_P$ es final respecto de la proyección canónica y de la topología del coproducto y, por tanto, de cada una de las inclusiones $(P,\tau|_P) \hookrightarrow (X,\tau_\wp)$.

Es importante advertir que lo que se busca es que $(X,\tau_\wp) \in \mathbb{S}_\wp$, para lo cual es necesario que $\tau_\wp$ sea final respecto del sumidero de inclusiones de los elementos de $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$. A continuación se verá que ambos conjuntos coinciden bajo ciertas restricciones.

Proposición 2.9 *Dada* $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)$ *se tiene que* $\tau|_P = \tau_\wp|_P$

Demostración. ($\subseteq$) Es claro que $\tau \subseteq \tau_\wp$, y por tanto, $\tau|_P \subseteq \tau_\wp|_P$.
($\supseteq$) Sea $U \in \tau_\wp|_{P_0}$; entonces

$$\exists V \in \tau_\wp, V \cap P_0 = U$$

En consecuencia

$$(\forall P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau), P \cap V \in \tau|_P) \wedge (V \cap P_0 = U)$$

de lo cual se sigue que:

$$(V \cap P_0 \in \tau|_{P_0}) \wedge (V \cap P_0 = U)$$

Por lo tanto, $U \in \tau|_{P_0}$.♦

Definición 2.9 *Se dice que una propiedad* $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ ***se preserva bajo funciones continuas*** *si para todo* $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$,*y para toda* $f \in \mathfrak{Top}((X,\tau),(Y,\sigma))$ *se tiene que:*

$$(X,\tau) \in \wp \Rightarrow \left(f(X), \sigma\big|_{f(X)}\right) \in \wp$$

Proposición 2.10 *Si* $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ *es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, entonces* $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau) = \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$.

Demostración.($\subseteq$) Es inmediato, pues $\tau|_P = \tau_\wp|_P$.
($\supseteq$) Dado $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_\wp)$, como $\tau \subseteq \tau_\wp$ se tiene que $1_P : (P,\tau_\wp|_P) \to (P,\tau|_P)$ es continua. Por tanto, como $(P,\tau_\wp|_P)$ satisface $\wp$, también $(P,\tau|_P)$ la satisface. Consecuentemente, $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)$.♦

Corolario 2.4 *Dados* $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ *y* $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ *una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, entonces* $\tau_\wp$ *es final respecto del sumidero:*

$$(\iota_P : (P,\tau_\wp|_P) \to (X,\tau_\wp))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)}$$

Definición 2.10 *Dada* $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ *una propiedad, se define:*

$$\mathbb{S}_\wp := \left\{(X,\tau) \in \mathfrak{Top} : (\iota_P : (P,\tau|_P) \to (X,\tau))_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau)} \text{ es final}\right\}$$

Teorema 2.5 *Dada* $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ *una propiedad, si* $\wp$ *se preserva bajo funciones continuas, entonces* $\mathbb{S}_\wp$ *es una subcategoría correflexiva de* $\mathfrak{Top}$.

Demostración. (i) Dados $(X,\tau) \in \mathbb{S}_\wp$ y $(Y,\sigma) \in \mathfrak{Top}$ tales que $(X,\tau) \overset{h}{\cong} (Y,\sigma)$, entonces $\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau) \cong \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(Y,\sigma)$ por ser $\wp$ una propiedad que se preserva bajo funciones continuas, y además se tiene el diagrama:

del cual es inmediato que $(Y,\sigma) \in \mathbb{S}_{\wp}$; por lo tanto, $\mathbb{S}_{\wp}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$.

(ii) Dado $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$, se tiene que $(X,\tau_{\wp}) \in \mathbb{S}_{\wp}$ y además que $1_X : (X,\tau_{\wp}) \to (X,\tau)$ es una correflexión, pues dada cualquier $f \in \mathfrak{Top}\left((W,\omega),(X,\tau)\right)$ con $(W,\omega) \in \mathbb{S}_{\wp}$, se tiene el siguiente diagrama:

con $P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(W,\omega)$ y $\kappa_{f(P)}$, ι_P son las inclusiones canónicas. Como $f\mid_P^{f(P)}$ es continua, entonces $\left(f(P), \tau\mid_{f(P)}\right) \in \wp$ y, por tanto, $f(P) \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(X,\tau_{\wp})$. De aquí que $\kappa_{f(P)}$ sea continua y, como:

$$\forall P \in \mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(W,\omega), \kappa_{f(P)} f \mid_P^{f(P)} = \iota_P f$$

y ω es final respecto de $(\omega\mid_P, \iota_P)_{\mathsf{Pot}_{\mathfrak{P}}(W,\omega)}$ se tiene que $f \in \mathfrak{Top}\left((W,\omega),(X,\tau_{\wp})\right)$.♦

Corolario 2.5 $(X,\tau) \in \mathbb{S}_{\wp}$ *si y solamente si* $(X,\tau) \cong (X,\tau_{\wp})$.

Demostración. Todo $\mathbb{S}_{\wp}$-espacio es su propio correflector y $\mathbb{S}_{\wp}$ es cerrada bajo homeomorfismos.♦

Hasta el momento sólo se han asociado subcategorías correflexivas de Top a propiedades que se preservan bajo funciones continuas, pero observando que $\mathbb{S}_{\wp}$ se obtiene formando identificaciones de coproductos de espacios que satisfacen la propiedad $\wp$, se puede generalizar la técnica.

2.6. Caracterización de las subcategorías bicorreflexivas

Proposición 2.11 *Si* $r:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ *es una retracción y* $r=gf$*, donde*

$$f:(X,\tau)\to(Z,\rho)\quad y\quad g:(Z,\rho)\to(Y,\sigma)$$

son continuas, entonces g *es una retracción.*

Demostración. Como r es retracción existe una función continua $s:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$ tal que $rs=1_Y$; puesto que $r=gf$, entonces

$$1_Y=rs=gfs$$

es decir, fs es un inverso derecho continuo de la función g. Luego g es retracción.♦

Proposición 2.12 *Toda retracción inyectiva es homeomorfismo.*

Demostración. $r:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ es una biyección continua con inversa continua $s:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$.♦

Definición 2.11 *Se dice que una subcategoría* $\underline{\mathbf{A}}$ *de* $\mathfrak{Top}$ ***está cerrada bajo la formación de retracciones (ó de identificaciones)*** *si el hecho de que* $r:A\to B$ *sea una retracción (ó una identificación) con* $A\in\underline{\mathbf{A}}$ *implica que* $B\in\underline{\mathbf{A}}$.

Lema 2.1 *Toda subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *está cerrada bajo la formación de retracciones.*

Demostración. Sean, $(X,\tau)\in\mathfrak{Top}$, $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, $(A,\alpha)\in\underline{\mathbf{A}}$ y $r:(A,\alpha)\to(X,\tau)$ una retracción.

Sea (X,τ') el correflector de (X,τ) en $\underline{\mathbf{A}}$. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

Por las dos proposiciones anteriores, 1_X es una retracción inyectiva y, por tanto, es un homeomorfismo.♦

Observación 2.5 *Nótese que*

$$\underline{\mathbf{A}}=\{(X,\tau)\in\mathfrak{Top}:\tau=\mathsf{Pot}\,(X)\wedge\tau=\{X,\emptyset\}\}$$

es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ *que no es bicorreflexiva.*

Proposición 2.13 *Dada $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva, existen $(Z, \rho) \in \mathfrak{Top}$ y un par de funciones continuas h y p que hacen conmutar el diagrama:*

con p una identificación y h biyectiva.

Demostración. Basta tomar $(Z, \rho) = (X/\!\sim_f, \widetilde{\tau})$ donde para cualesquiera puntos $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

y $\widetilde{\tau}$ es la topología final para $X/\!\sim_f$ respecto (τ, p), siendo p la proyección canónica

$$\begin{array}{cccc} p: & X & \to & X/\!\sim_f \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

y definir

$$h : (X/\!\sim_f, \widetilde{\tau}) \to (Y, \sigma)$$

mediante $h[x] = f(x)$♦

Teorema 2.6 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces:*
(a) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de identificaciones.
(b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración. Sean $(A_i, \alpha_i)_I \subseteq \underline{\mathbf{A}}$, $X \in \mathfrak{Set}$ y $(f_i : A_i \to X)_I$ un sumidero. Si τ es final respecto a $(\alpha_i, f_i)_I$, se tiene que (X, τ) es el coproducto de $(A_i, \alpha_i)_I$, que es un espacio de identificación cuando $\sharp(I) = 1$.

Sea (X, τ') el correflector de (X, τ).

Entonces, por el teorema 1.2, 1_X es homeomorfismo.♦

Teorema 2.7 *Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos. Son equivalentes:*
a) $\underline{\mathbf{A}}$ es bicorreflexiva.
b) $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo la formación de identificaciones y coproductos.

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Es el teorema anterior.
$(b) \Rightarrow (a)$: Sea $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$. Si $X = \varnothing$, entonces $(X, \tau) \in \underline{\mathbf{A}}$ porque es el coproducto de la familia vacía de $\underline{\mathbf{A}}$.

Supóngase X no vacío. Sea

$$\mathcal{S} = [\mathfrak{Top}\left((A,\alpha),(X,\tau)\right)]_{(A,\alpha)\in\underline{\mathbf{A}}}$$

nótese que es un episumidero (pues entre sus elementos están las funciones constantes).

Sea I una clase de índices tal que $\mathcal{S} = (f_i)_I$. Obsérvese el siguiente diagrama:

donde $(\iota_i)_I$ son las inclusiones canónicas en el coproducto, α es la topología final respecto de (α_i, ι_i), f es la función continua que existe por la definición 1.7 y p y h son la identificación y la biyección que existen por la proposición2.13; entonces, $(Z,\rho) \in \underline{\mathbf{A}}$ y es un correflector de (X,τ) y h una correflección.♦

2.7. Descripción de la subcategoría bicorreflexiva generada

Observación 2.6 *Obsérvese que si $\left(\underline{A_i}\right)_I$ es una familia arbitraria de subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, entonces la intersección*

$$\underline{\mathbf{A}} = \bigcap \underline{A_i}$$

también es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

En efecto, es claro que $\underline{\mathbf{A}}$ está cerrada bajo homeomorfismos, identificaciones y coproductos.♦

Esta observación y el hecho de que $\mathfrak{Top}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ justifica la siguiente definición.

Definición 2.12 ***La subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$*** *es la intersección de todas las subcategorías correflexivas que contienen a $\underline{\mathbf{A}}$.*

Lema 2.2 *Sean*

$$\left((A_i,\alpha_i) \xrightarrow{f_i} (A,\alpha)\right)_I \wedge \left((X_i,\tau_i) \xrightarrow{g_i} (X,\tau)\right)_I$$

coproductos topológicos arbitrarios. Si para toda $i \in I$ existe una identificación

$$c_i : (A_i,\alpha_i) \to (X_i,\tau_i)$$

entonces existe una única función continua $c : (A, \alpha) \to (X, \tau)$ *que para toda* $i \in I$ *hace conmutar el diagrama*

y es una identificación.

Demostración. $(g_i c_i)_I$ es un sumidero, por lo que existe una función continua que hace conmutar el diagrama, por la definición 1.7.

Sean $(Y, \sigma) \in \mathfrak{Top}$ y $h \in \mathfrak{Set}(X, Y)$ tal que hc es continua.

Entonces:

$$\forall i \in I, hcf_i = (hg_i)\, c_i$$

es continua; y como cada c_i es una identificación y $(g_i)_I$ es un sumidero final, resulta que h es continua.

Por lo tanto, τ es final respecto de (α, c). Por lo tanto, c es una identificación.♦

Teorema 2.8 *Sea* $\underline{\mathbf{A}}$ *una subcategoría de* $\mathfrak{Top}$ *arbitraria. Entonces:*

$$\widetilde{\underline{\mathbf{A}}} := \{(X, \tau) \in \mathfrak{Top} : (X, \tau) \text{ es una identificación de un coproducto de } \underline{\mathbf{A}}\text{-espacios}\}$$

es la subcategoría correflexiva generada por $\underline{\mathbf{A}}$.

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama:

donde $(A_i, \alpha_i)_I \subseteq \underline{\mathbf{A}}$, α es final respecto de (α_i, ι_i) y c es una identificación.

Entonces $(X, \tau) \in \underline{\mathbf{A}}$.

(a) Si h es homeomorfismo, entonces $(Y, \sigma) \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ pues hc es una identificación. Por tanto $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$.

(b) Si h es una identificación, entonces $(Y, \sigma) \in \widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ pues hc es una identificación. Por tanto $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es cerrada bajo identificaciones.

(c) Sea $I \times J$ una familia de índices y sea $\left(A_{(i,j)}, \alpha_{(i,j)}\right)_{I\times J} \subseteq \underline{\mathbf{A}}$. Considérese el diagrama:

donde α_i es la topología final para $\coprod_{k\in J} A_{(i,k)}$ respecto de las inclusiones $\iota_{(i,j)}$, τ_i son las topologías finales para X_i respecto de los identificaciones c_i, τ es la topología final para $\coprod_{m\in I} X_m$ respecto de las inclusiones ι_i, $\iota_{(i,j)}$ son las inclusiones canónicas del teorema 1.11 y donde las inclusiones κ_i existen por la definición 1.7. Entonces, c es la identificación que existe por el lema 2.2. Luego, $\left(\coprod_{m\in I} X_m, \tau\right)$ es identificación de un coproducto de $\underline{\mathbf{A}}$-espacios y, por lo tanto, $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ está cerrada bajo coproductos.

Esto prueba que $\widetilde{\underline{\mathbf{A}}}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, que contiene a $\underline{\mathbf{A}}$ y que, por construcción, es mínima.♦

Así, se tienen dos métodos para obtener subcategorías correflexivas a partir de propiedades determinadas.

Observación 2.7 *Para una propiedad $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ que se preserva bajo transformaciones continuas se tiene que ambos métodos generan la misma subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, es decir, $\mathbb{S}_\wp = \widetilde{\underline{\wp}}$.*

Observación 2.8 *Sea $\wp \subseteq \mathfrak{Top}$ la propiedad de ser finito y sea $\wp' \subseteq \mathfrak{Top}$ la propiedad de ser finitamente generado, entonces es claro que $\mathbb{S}_\wp = \mathbb{S}_{\wp'}$.*

En resumen, a toda subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$ se le puede asociar una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo, a saber, ella misma; ésta, a su vez, nos define una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, a saber, su generada, pero no necesariamente es la única que lo hace.

2.8. La retícula de subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$

Al ser cerrada bajo intersecciones y estar ordenada por la contención, resulta que la familia de subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ es una retícula (*lattice*), cuyo elemento 0 es $\underline{\{\emptyset\}}$ y cuyo elemento 1 es $\mathfrak{Top}$.

Se muestran a continuación algunos ejemplos más de subcategorías correflexivas y se dan los primeros elementos de la retícula.

Ejemplo 2.6 *Como un primer ejemplo de subcategoría correflexiva generada, se tiene a la generada por la subcategoría vacía $\underline{\emptyset}$. Puesto que $\underline{\{\emptyset\}}$ es la subcategoría correflexiva más chica de $\mathfrak{Top}$, y puesto $\underline{\emptyset} \subseteq \underline{\{\emptyset\}}$, resulta que*

$$\widetilde{\underline{\emptyset}} = \underline{\{\emptyset\}}$$

Ejemplo 2.7 *La subcategoría $\underline{\mathbb{D}}$, de los espacios discretos es la subcategoría bicorreflexiva generada por la subcategoría de los espacios singulares.*

En efecto, sea

$$\underline{A}_m = \{(X_\lambda, \tau_\lambda) \in \mathfrak{Top} : X_\lambda = \{x_\lambda\} \vee X_\lambda = \emptyset,\ \lambda \in \Lambda\}$$

siendo Λ cierta clase de índices.

Sea $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{A}_m$ y considérese el siguiente diagrama:

Como las flechas del sumidero $(\iota_i)_I$ siempre son continuas, τ es discreta. Como τ es discreta, si c es una identificación, entonces τ' es discreta. Por tanto, $\widetilde{\underline{A}_m} \subseteq \underline{\mathbb{D}}$; y como $\underline{\mathbb{D}}$ es la mínima subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$, se tiene que $\widetilde{\underline{A}_m} = \underline{\mathbb{D}}$.♦

Ejemplo 2.8 *Sea $\underline{\mathbb{I}_2}$ la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son todos los espacios indiscretos con dos puntos, y sea $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ la clase de los espacios topológicos cuyos conjuntos abiertos son cerrados. Entonces, $\mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} = \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$.*

En efecto: (a) Sea $(A, \alpha) \in \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$; entonces existe una familia $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{\mathbb{I}_2}$ y una identificación:

$$p : \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i) \to (A, \alpha)$$

Sea $U \in \alpha$; entonces:

$$\forall i \in I, p^{-1}(U) \cap X_i = \emptyset \vee p^{-1}(U) \cap X_i = X_i$$

De aquí que:

$$\forall i \in I, p^{-1}(A - U) = X_i \vee p^{-1}(A - U) = \emptyset$$

Por lo tanto, $A - U \in \alpha$, de lo cual se concluye que $(A, \alpha) \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}$ y, por lo tanto, $\widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}} \subseteq \mathbb{I}_{\mathbb{L}}$.

(b) Sea $(X, \tau) \in \mathbb{I}_{\mathbb{L}}$. Defínase, para cada $x \in X$:

$$B_x := \cap \{U \in \tau : x \in U\}$$

Nótese que:

$$\forall x, \quad B_x \in \tau \quad \wedge \quad \tau \mid B_x = \{B_x, \emptyset\}$$

y que:

$$\forall x \forall y, \quad B_x \cap B_y = \emptyset \quad \vee \quad B_x = B_y$$

Por tanto:

$$(X, \tau) \cong \coprod_{i \in I} (B_{x_i}, \tau \mid B_{x_i})$$

donde $(x_i)_I$ es una colección de representantes de las componentes indiscretas.

Entonces, para demostrar que $\mathbb{I}_{\mathbb{L}} \subseteq \widetilde{\underline{\mathbb{I}_2}}$, basta expresar a cada B_{x_i} como una identificación de coproductos de $\underline{\mathbb{I}_2}$-espacios.

Si $\sharp(B_{x_i}) = 1$, considérese la constante.

De otro modo, defínase:

$$\mathsf{C}_{B_{x_i}} := \left\{B \in \mathsf{Pot}(B_{x_i}) : \sharp(B) = 2 \quad \wedge \quad x_i \in B\right\}$$

y sea

$$p : \coprod_{B \in \mathsf{C}_{B_{x_i}}} (B, \{B, \emptyset\}) \to (B_{x_i}, \tau \mid B_{x_i})$$

donde p es la *proyección canónica*, es decir, coincide con la identidad en cada cofactor. Entonces p es suprayectiva y es continua.

Sea $V \subseteq B_{x_i}$ tal que $p^{-1}(V)$ es abierto; entonces:

$$\forall B \in \mathsf{C}_{B_{x_i}}, \quad p^{-1}(V) \text{ es abierto en } B;$$

por tanto:

$$\forall B \in \mathsf{C}_{B_{x_i}}, \quad p^{-1}(V) = B \quad \vee \quad p^{-1}(V) = \emptyset$$

Distínganse dos casos, a saber:

$$\left(x_i \in V \Rightarrow \forall B \in \mathsf{C}_{B_{x_i}}, \quad p^{-1}(V) \cap B = B\right) \Rightarrow V = B_{x_i}$$

$$\left(x_i \notin V \Rightarrow \forall B \in \mathsf{C}_{B_{x_i}}, \quad p^{-1}(V) \cap B = \emptyset\right) \Rightarrow V = \emptyset$$

Por lo tanto, $V \in \tau \mid B_{x_i}$, de lo cual se sigue que p es una identificación.⧫

$\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ es la subcategoría de los **espacios localmente indiscretos.** Este nombre obedece a que cada punto tiene una vecindad discreta..

Proposición 2.14 *Toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$ tiene entre sus miembros a los espacios indiscretos de dos puntos.*

Demostración. Sea $\underline{\mathbf{A}}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ distinta de $\underline{\mathbb{D}}$. Sea $(2,\tau)$ el $\underline{\mathbf{A}}$-correflector de $(2,\{\varnothing,2\})$.

Sea $(A,\alpha)\in\underline{\mathbf{A}}$ tal que α no es discreta. Entonces existe $B\subsetneq A$ tal que $B\notin\alpha$.

Considérese el siguiente diagrama

donde para $i\in 2$ se define

$$f_i : A \to 2$$

mediante

$$f_i\left(a\right)=\begin{cases} i,\text{ si } a\in B \\ \left(i+1\right)_{\operatorname{mod}2},\text{ si } a\notin B\end{cases}$$

Para $i\in 2$, $f_i:(A,\alpha)\to(2,\{\varnothing,2\})$ es continua, porque el codominio es indiscreto; por lo tanto, para $i\in 2$, $f_i:(A,\alpha)\to(2,\tau)$ es la única función continua que hace conmutar el diagrama.

Nótese que

$$f_i^{-1}\left\{i\right\}=B\notin\alpha$$

Por lo tanto, para $i\in 2$, $\{i\}\notin\tau$, de lo cual se sigue que $\tau=\{\varnothing,2\}$.♦

Como consecuencia de la proposición anterior se puede asegurar que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ es la subcategoría bicorreflexiva inmediatamente superior a $\underline{\mathbb{D}}$ según el orden dado por la contención $\subseteq$ entre categorías; esta situación entre $\underline{\mathbb{D}}$ e $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ quedará indicada escribiendo

$$\underline{\mathbb{D}}\sqsubset\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}.$$

♦

Ejemplo 2.9 *Sea*

$$\Sigma:=\left\{(X,\tau)\in\mathfrak{Top}:\sharp\left(X\right)=2\quad\wedge\quad\sharp\left(\tau\right)=3\right\}$$

es decir, es la clase de los espacios topológicos homeomorfos al espacio de Sierpinski (i.e. $\left(\{0,1\},\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}\right)$*, que se puede escribir como* $(2,3)$*), debido a lo cual la denotaremos por* $\underline{\Sigma}$*.*

Lema 2.3 *Dadas,* $(X_i,\tau_i)_I\subseteq\underline{\Sigma}$*,* $\left(\coprod_{i\in I}X_i,\tau\right)$*, donde* τ *es final con respecto al sumidero de inclusiones, y* $U\in\tau$*, si* $x\in X_j$*,* $\{x\}\notin\tau_j$ *y* $x\in U$*, entonces* $U\cap X_j=X_j$*.*

Demostración. Si $U \in \tau$, entonces:

$$\forall i \in I, U \cap X_i \in \tau_i$$

Por tanto:

$$(U \cap X_j \neq \emptyset \wedge \{x\} \notin \tau_j) \Rightarrow U \cap X_j = X_j$$

♦

Recuérdese que $\underline{\mathbb{F}}$ denota a la subcategoría bicorreflexiva de los espacios finitamente generados, es decir, aquéllos para los que resulta final el sumidero de inclusiones de los subespacios finitos.

Ejemplo 2.10 $\widetilde{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbb{F}}$.

Demostración. ($\subseteq$) Por ser finito, el espacio de Sierpinski está finitamente generado, por lo que $\underline{\Sigma} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$; consecuentemente, $\widetilde{\underline{\Sigma}} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$.

($\supseteq$) (a) Primeramente se verá que todo espacio finito (F, φ) es identificación de un coproducto de $\underline{\Sigma}$-espacios, para lo cual se aplicará inducción sobre el número cardinal de F.

Si $\sharp(F) = 0$, entonces el coproducto de la familia vacía de $\underline{\Sigma}$-espacios es (F, φ), con $\varphi = \{\varnothing\}$.

Si $\sharp(F) = 1$, entonces la constante desde $(2, 3)$ a F es una identificación.

Supóngase que (F, φ) es identificación de un coproducto de $\underline{\Sigma}$-espacios, cuando $\sharp(F) = k$.

Sean, F un conjunto cuyo número cardinal es $k + 1$, $\varphi \in \mathfrak{Top}[F]$, $x \in F$ y $W = \cap\{U \in \varphi : x \in U\}$. Entonces, W es abierto y

$$\sharp(F - \{x\}) = k$$

Distínganse dos casos:

(i) $W = \{x\}$. Sea $y \in \cap\{U \in \varphi : W \subsetneq U\}$ y defínase

$$c : \left(F - \{x\}, \varphi\,|_{F-\{x\}}\right) \coprod (2, 3) \to (F, \varphi)$$

mediante

$$c\,|_{F-\{x\}} = 1_{F-\{x\}}, \quad c(0) = x \quad c(1) = y$$

Entonces c es una identificación y, por lo tanto, $(F, \varphi) \in \widetilde{\underline{\Sigma}}$.

(ii) $W \neq \{x\}$; sean, $y \in W - \{x\}$ y

$$c : \left(F - \{x\}, \varphi\,|_{F-\{x\}}\right) \coprod (2, 3) \coprod (2', 3') \to (F, \varphi)$$

dada por

$$c\,|_{F-\{x,y\}} = 1_{F-\{x,y\}}, \quad c(0) = c(1') = x \quad c(1) = c(0') = y$$

entonces c es una identificación y, por lo tanto, $(F, \varphi) \in \widetilde{\underline{\Sigma}}$.

(b) Ahora se verá que todo $\underline{\mathbb{F}}$-espacio es identificación de un coproducto de una familia de espacios finitos.

Sea $(X,\tau) \in \underline{\mathbb{F}}$; se tiene el diagrama:

donde

$$\begin{array}{rccl} c: & \coprod\limits_{F \in \mathsf{Pot}_F(X)} (F, \tau\mid_F) & \to & (X,\tau') \\ & (x,F) & \mapsto & x \end{array}$$

y τ' es final para X respecto a c y a la topología de $\coprod\limits_{F \in \mathsf{Pot}_F(X)} (F, \tau\mid_F)$. Puesto que cada $\underline{\mathbb{F}}$-espacio es su propio correflector, $(X,\tau) \cong (X,\tau')$.

$$\therefore \underline{\mathbb{F}} \subseteq \widetilde{\underline{\Sigma}}$$

Entonces queda probado que

$$\widetilde{\underline{\Sigma}} = \underline{\mathbb{F}}$$

♦

Proposición 2.15 *Todo espacio localmente indiscreto está finitamente generado, pero no recíprocamente.*

Demostración. Es claro que $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \subseteq \underline{\mathbb{F}}$. Para mostrar que lo recíproco es falso, basta pensar en el espacio de Sierpinski que está finitamente generado pero que, claramente, no es localmente indiscreto.♦

Proposición 2.16 *Toda subcategoría bicorreflexiva que contenga propiamente a* $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$ *tiene entre sus miembros al espacio de Sierpinski.*

Demostración. Si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva que contiene propiamente a $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}}$, entonces es posible hallar un espacio $(A,\alpha) \in \underline{A}$ y un abierto $U \subseteq A$ no cerrado. Sea

$$p_U : (A,\alpha) \to \{0,1\}$$

dada por

$$p_U(a) = \begin{cases} 0, \text{ si } a \in U \\ 1, \text{ si } a \notin U \end{cases}$$

Por lo tanto, la identificación inducido por p_U es el espacio de Sierpinski.♦

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores se tiene el siguiente

Corolario 2.6 $\underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}}$. ♦

Los resultados anteriores pueden sintetizarse escribiendo

$$\underline{\{\varnothing\}} \sqsubset \underline{\mathbb{D}} \sqsubset \underline{\mathbb{I}_{\mathbb{L}}} \sqsubset \underline{\mathbb{F}} \subset \underline{\mathbb{K}}$$

El lector interesado en conocer más a fondo la retícula de las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, puede encontrar una descripción más detallada de ella en [5].

Capítulo 3

Bicorreflexividad y clases de funciones

En el capítulo anterior se mostraron dos métodos para obtener subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, y se mostró a su vez que la única que no es bicorreflexiva es $\{\emptyset\}$. Horst Herrlich menciona en un artículo [5] que el primer método es demasiado particular para obtener por medio de él a todas las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ y desarrolla un método, por medio de operadores límite, para obtenerlas todas, además de establecer una biyección entre la familia de subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$ y la familia de operadores límite idempotentes.

Graciela Salicrup y Roberto Vázquez muestran en su artículo [1] otra forma de obtener a todas las subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, de esto trata el presente capítulo.

Iniciamos con el concepto de producto fibrado.

3.1. Producto fibrado en $\mathfrak{Top}$

Definición 3.1 *Un cuadrado conmutativo de funciones continuas:*

se llama ***cuadrado cartesiano*** *si, dadas cualesquiera dos funciones continuas*

$$a_i : (W, \omega) \to (A_i, \alpha_i)\, , \; i \in \{0, 1\}$$

tales que

$$g_0 a_0 = g_1 a_1$$

exista una única función continua

$$f : (W, \omega) \to (X, \tau)$$

tal que:

En tal caso se hablará de la fuente:

$$f_i : (X, \tau) \to (A_i, \alpha_i) \, , \; i \in \{0, 1\}$$

como de un ***producto fibrado del sumidero:***

$$g_i : (A_i, \alpha_i) \to (A, \alpha) \, , \; i \in \{0, 1\}$$

en $\mathfrak{Top}$ *y se dirá que la pareja de funciones* $(f_i)_{i\in\{0,1\}}$ *tiene la* ***propiedad universal del producto fibrado****.*

Observación 3.1 *Todo producto fibrado es una monofuente.*[1]

En efecto, obsérvese el siguiente diagrama

donde $(f_i)_{i\in\{0,1\}}$es un producto fibrado de $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$. Entonces, por la propiedad universal del producto fibrado, $f = h$.♦

[1] Véase la definición .

Descripción del producto fibrado en $\mathfrak{Top}$.

Proposición 3.1 *En $\mathfrak{Top}$ cualesquiera dos funciones de codominio común tienen un producto fibrado.*

Demostración. Sea $(g_i : (A_i, \alpha_i) \to (A, \alpha))_{i \in \{0,1\}}$ un sumidero de funciones continuas y sea:

$$X = \left\{ x \in \prod_{i \in 2} A_i : g_0\left(p_0\left(x\right)\right) = g_1\left(p_1\left(x\right)\right) \right\}$$

Sean $(W, \omega) \in \mathfrak{Top}$ y a_0, a_1 dos funciones continuas tales que conmuta el diagrama

Entonces, se tiene el diagrama

donde f existe y es única por la propiedad universal del producto topológico.

Dado $w \in W$, $g_0 a_0\left(w\right) = g_1 a_1\left(w\right)$; por lo tanto, $f\left(W\right) \subseteq X$ y conmuta el siguiente diagrama:

Por abuso del lenguaje, se dice que (X, τ) es el **producto fibrado de la pareja** $(g_i)_{i \in \{0,1\}}$.♦

Observación 3.2 *El producto fibrado también puede ser definido en* $\mathfrak{Set}$.

Proposición 3.2 *El producto fibrado es único salvo homeomorfismo.*

Demostración. Dado el $\mathfrak{Top}$-sumidero

$$(f_i : (A_i, \alpha_i) \to (A, \alpha))_{i \in \{0,1\}}$$

sean

$$(g_i : (X, \tau) \to (A_i, \alpha_i))_{i \in \{0,1\}} \quad , \quad (h_i : (Y, \sigma) \to (A_i, \alpha_i))_{i \in \{0,1\}}$$

productos fibrados de $(f_i)_{i \in \{0,1\}}$; entonces se tiene el siguiente diagrama:

donde G y H existen y son únicas por la propiedad universal del producto fibrado. En consecuencia:

$$\forall i \in 2, \big(g_i HG = g_i 1_X \quad \wedge \quad h_i GH = h_i 1_Y\big)$$

Además, como $(g_i)_{i \in \{0,1\}}$, $(h_i)_{i \in \{0,1\}}$son monofuentes:

$$HG = 1_X \quad \wedge \quad GH = 1_Y$$

Por lo tanto, $(X, \tau) \cong (Y, \sigma)$.♦

Proposición 3.3 *Si*

$$(f_i : (X, \tau) \to (A_i, \alpha_i))_{i \in \{0,1\}}$$

es un producto fibrado de $(g_i : (A_i, \alpha_i) \to (A, \alpha))_{i \in \{0,1\}}$ *y* $h : (W, \omega) \to (X, \tau)$ *es un homeomorfismo, entonces* $(f_i h)_{i \in \{0,1\}}$ *es un producto fibrado de* $(g_i)_{i \in \{0,1\}}$.

Demostración. Sean, $(V,\nu) \in \mathfrak{Top}$ y para toda $i \in \{0,1\}$, $v_i \in \mathfrak{Top}\left((V,\nu),(A_i,\alpha_i)\right)_{i\in\{0,1\}}$ tales que hacen conmutar al diagrama

Entonces existe una única $f : (V,\nu) \to (X,\tau)$ tal que:

$$\forall i \in 2, \quad f_i f = v_i$$

Entonces:

$$\forall i \in 2, \quad (f_i h)\left(h^{-1} f\right) = v_i$$

donde $h^{-1}f$ es única, por la unicidad de f. Por lo tanto, $(f_i h)_{i\in\{0,1\}}$ es un producto fibrado de $(g_i)_{i\in\{0,1\}}$♦.

Ahora se puede definir a un tipo especial de familias de funciones que servirá para construir subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$.

3.2. Definición de *0-clase* y de *1-clase*

Definición 3.2 *Una 0-clase es cualquier clase de funciones continuas y suprayectivas.*

Definición 3.3 *Una 0-clase M se llama 1-clase si para todo cuadrado cartesiano en* $\mathfrak{Top}$

el hecho de tener f en M implica que g pertenece a M.

Ejemplos de 1-clases.

Ejemplo 3.1 *La 0-clase máxima:*

$$M_{máx} := \{f \in Mor\,(\mathfrak{Top}) : f \ \textit{es suprayectiva}\}$$

es 1-clase y, por lo tanto, es la 1-clase máxima.

Demostración. Considérese el siguiente cuadrado cartesiano:

Si $g_0 \in M_{máx}$ y $a_1 \in A_1$, entonces existe $a_0 \in A_0$ tal que $g_0(a_0) = g_1(a_1)$.

Para $i \in 2$ sea

$$\begin{array}{rccc} w_i : & \{\varnothing\} & \to & A_i \\ & \varnothing & \mapsto & a_i \end{array}$$

Entonces existe $f : \{\varnothing\} \to X$ tal que, para $i \in 2$, $f_i f = w_i$. Por lo tanto, $f_1 f\,(\varnothing) = a_1$. Por lo tanto, $f_1 \in M_{máx}$♦

Observación 3.3 *Es obvio que la unión de 0-clases es una 0-clase.*

Lema 3.1 *La intersección de 1-clases es 1-clase.*

Demostración. Sea $(M_j)_J$ una familia de *1-clases* y considérese el siguiente diagrama:

Si es un cuadrado cartesiano y $g_0 \in \bigcap\limits_{j \in J} M_j$, entonces para toda $j \in J$, $f_1 \in M_j$ y, consecuentemente, $f_1 \in \bigcap\limits_{j \in J} M_j$. Por lo tanto M es una *1-clase*.♦

3.3. *1-clase* generada por una *0-clase* M

Definición 3.4 $\widetilde{M}$ *denotará a la intersección de todas las 1-clases que contienen a una 0-clase arbitraria* M *y se hablará de* $\widetilde{M}$ *como de la 1-clase generada por la 0-clase* M.

Definición 3.5 *Dada* M *una 0-clase, sea* M' *la clase de funciones* f' *tales que existe un cuadrado cartesiano:*

con $f \in M$.

Lema 3.2 M' *es 1-clase y* $M' = \widetilde{M}$.

Demostración: (i) Supóngase que se tiene el siguiente cuadrado cartesiano:

con $f \in M'$. Entonces existe un cuadrado cartesiano:

con $g \in M$. Entonces, el siguiente diagrama:

es un cuadrado cartesiano y, por lo tanto, $f' \in M'$. Consecuentemente, M' es una *1-clase*.

(ii) Sea N una *1-clase* tal que $M \subseteq N$ y sea $f' \in M'$. Entonces existe un cuadrado cartesiano:

con $f \in M$. Entonces, $f' \in N$ y, por tanto, $M' \subseteq N$. Consecuentemente, $M' \subseteq \widetilde{M}$.

(iii) Dada $f \in M$, es claro que el siguiente diagrama:

es un cuadrado cartesiano. Por lo tanto, $M \subseteq M'$. Por lo tanto, $\widetilde{M} \subseteq M'$.♦

3.4. Subcategoría cerrada asociada a una *0-clase*

Definición 3.6 *Sea M una 0-clase; se define:*

$$A\,(M) := \{(A,\alpha) \in \mathfrak{Top} : \forall f \in M, (cod\,(f) = A) \Rightarrow f \text{ es identificación}\}$$

es decir, los espacios topológicos que nunca son codominio de algún elemento de M, o bien, los que cada vez que aparecen como codominio de alguna función de M, dicha función es una identificación.

Observación 3.4 *Para cualquier 0-clase M se tiene que $A\,(M)$ contiene a los espacios singulares. Por lo tanto, no toda propiedad está asociada a una 0-clase.*

Proposición 3.4 *Si M es una 1-clase, entonces $A(M)$ es una subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sean $(A,\alpha) \in A(M)$, $(A,\alpha) \overset{h}{\cong} (B,\beta)$ y $f \in M$ tal que $cod\,(f) = B$.

Considérese el siguiente cuadrado cartesiano:

Como $f \in M$, entonces $f' \in M$, por lo que f' es una identificación.

Sean $(C, \gamma) \in \mathfrak{Top}$ y $g \in \mathfrak{Set}\,(B, C)$ tal que gf es continua; entonces, gfh' es continua y, por lo tanto, ghf'es continua. Por lo tanto, g es continua, de lo cual se sigue que g es una identificación.♦

Entonces, se puede pensar que cada *1-clase* describe una propiedad topológica; de hecho, se puede decir todavía más, como se verá más adelante.

Observación 3.5 *En general, no es cierto que $A\,(M)$ es una subcategoría cerrada de $\mathfrak{Top}$, pero si lo es, se indicará escribiendo $\underline{\mathbf{A}}\,(M)$.*

Ejemplos de subcategorías cerradas asociadas a *0-clases*.

Ejemplo 3.2 *Si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces dado cualquier $(A, \alpha) \in \mathfrak{Top}$ y dado cualquier homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (A, \alpha)$ se tiene que f es una identificación. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 3.3 *Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase y para cualquier $(A, \alpha) \in \mathfrak{Top}$, cualquier retracción $r : (X, \tau) \to (A, \alpha)$ es una identificación. Es decir, $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 3.4 *Sea $\underline{A}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y sea M la clase de todas las $\underline{A}$-correflexiones; entonces $\underline{\mathbf{A}}(M) = \underline{A}$.*

En ejemplo, sea $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$. Entonces

$$(X, \tau) \in \underline{\mathbf{A}}(M) \Rightarrow (X, \tau) \in \underline{A}$$

porque $\underline{A}$ es cerrada bajo identificaciones.

Recíprocamente

$$(X, \tau) \in \underline{\mathbf{A}}(M) \Leftarrow (X, \tau) \in \underline{A}$$

porque toda $\underline{A}$-correflexión de un $\underline{A}$-espacio es un homeomorfismo.♦

Ejemplo 3.5 *Si $M = \emptyset$ entonces es una colección de funciones continuas y suprayectivas y además:*

$$A\,(\emptyset) = \{(A, \alpha) \in \mathfrak{Top} : \forall f, (f \in \emptyset \wedge cod\,(f) = A) \Rightarrow (f \text{ es identificación})\}$$

Puesto que para toda $(A, \alpha) \in \mathfrak{Top}$ es verdadera la implicación:

$$(f \in \emptyset \wedge cod\,(f) = A) \Rightarrow f \text{ es identificación}$$

se tiene que M es una 0-clase tal que $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.

Observación 3.6 *Obsérvese que si M y M' son 0-clases tales que $M \subseteq M'$ entonces $A(M') \subseteq A(M)$.*

En efecto, si $(A, \alpha) \in A(M')$ y $f : X \to A$ es un miembro de M, entonces $f \in M'$ y por lo tanto f es una identificación. Por lo tanto $A \in A(M)$.♦

Lema 3.3 *Dada una familia de 0-clases $(M_i)_I$, se tiene que*

$$A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} A\left(M_i\right)$$

Demostración. ($\subseteq$)

$$\forall i \in I, M_i \subseteq \bigcup_{m\in I} M_m$$

$$\therefore \forall i \in I, A\left(\bigcup_{m\in I} M_m\right) \subseteq A\left(M_i\right)$$

$$\therefore A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A\left(M_i\right)$$

($\supseteq$)

$$\left((A,\alpha) \in \bigcap_{i\in I} A\left(M_i\right)\right) \Rightarrow \Big(\forall i \in I, \big(f \in M_i \quad \wedge \quad cod\left(f\right) = A\big) \Rightarrow f \ \mathit{identificación}\Big)$$

$$\therefore \left(f \in \bigcup_{i\in I} M_i \quad \wedge \quad cod\left(f\right) = A\right) \Rightarrow f \ \mathit{identificación}$$

$$\therefore (A,\alpha) \in A\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \quad ♦$$

Lema 3.4 *Si $(B_j)_J$ es una partición de un conjunto Y y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces siendo $A_j = f^{-1}(B_j)$, $j \in J$, se tendrá que $(A_j)_J$ es una partición de X.*

Demostración. Se tiene que

$$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = f^{-1}(Y) = X$$

Debido a la suprayectividad de f tenemos que para cualquier $j \in J$ y cualquier $b \in B_j$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = b$. Por lo tanto, $A_j \neq \varnothing$, para toda $j \in J$. Finalmente, si para $j, k \in J$ se tiene que $x \in A_j \cap A_k$, entonces $x \in [f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k)] = f^{-1}(B_j \cap B_k)$. Por lo tanto $f\left(x\right) \in B_j \cap B_k$. Por lo tanto, $B_j = B_k$ y $A_j = A_k$. Esto prueba que $(A_j)_J$ es una partición de X.♦

Proposición 3.5 *Si $(A_j, \alpha_j)_J$ es una familia ajena de espacios topológicos no vacíos y*

$$f : (X, \tau) \to \coprod_{j \in J} (A_j, \alpha_j)$$

es una función continua y suprayectiva, entonces, siendo $X_j = f^{-1}(A_j)$ y $\tau_j = \tau|_{X_j}$, se tiene que $(X, \tau) = \coprod_{j \in J} (X_j, \tau_j)$.

Demostración. Por el lema anterior, $X = \coprod_{j \in J} X_j$. Además:

$$\forall j \in J, X_j = f^{-1}(A_j) \in \tau$$

Por lo tanto, $(X, \tau) = \coprod_{j \in J} (X_j, \tau_j)$, con $\tau_j = \tau \mid_{X_j}$.♦

Ahora se tienen todos los elementos para mostrar la relación existente entre *1-clases* y bicorreflexividad.

3.5. *1-clases* y bicorreflexividad

Teorema 3.1 *Si M es una 1-clase, entonces $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. (a) Sea $(A_i, \alpha_i)_I$ una familia de $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$-espacios, y sea $f \in M$, con $f : (X, \tau) \to \coprod_{i \in I} (A_i, \alpha_i)$; defínase, para cada $i \in I$, $X_i := f^{-1}(A_i)$. Entonces:

$$(X, \tau) = \coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$$

con $\tau_i = \tau \mid_{X_i}$. Se tiene el siguiente diagrama:

que para cada $i \in I$ es un cuadrado cartesiano. Entonces, para cada $i \in I$, $f \mid_{X_i} \in M$, por ser M una *1-clase*, y como $A_i \in \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$, se tiene que $f \mid_{X_i}$ es una identificación. Por tanto, f es una identificación. Por tanto $\coprod_{i \in I} (A_i, \alpha_i) \in \underline{\mathbf{A}}(M)$.

(b) Sean, (A,α) un $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$-espacio, $c:(A,\alpha)\to(X,\tau)$ una identificación y $f:(W,\omega)\to(X,\tau)$ una M-flecha. Se construye el producto fibrado (c',f') de (c,f):

f' es una identificación porque es una M-flecha de codominio en $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$; también c es una identificación; consecuentemente, también f es una identificación. Por lo tanto, $(X,\tau)\in\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$.♦

Proposición 3.6 *Si $\underline{A}$ es bicorreflexiva en $\mathfrak{Top}$ y $\widetilde{M}$ es la 1-clase generada por la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A}=\underline{A}(\widetilde{M})$.*

Demostración. Sea M la clase de las $\underline{A}$-correflexiones y sea $\widetilde{M}$ la *1-clase* generada por M. Puesto que $M\subseteq\widetilde{M}$, se tiene por la observación 3.6, que $\underline{A}(\widetilde{M})\subseteq\underline{A}(M)=\underline{A}$. Ahora sea $(A,\alpha)\in\underline{A}$ y sea $f:(X,\tau)\to(A,\alpha)$ un elemento de $\widetilde{M}$. Más arriba, en el lema 3.2, quedaron descritos los elementos de la *1-clase* generada por una *0-clase* arbitraria; de ahí que para f exista un cuadrado cartesiano

donde f' es una $\underline{A}$-correflexión de A' es decir, $f'\in M$. Puesto que $(A,\alpha)\in\underline{A}$, existe una única $g:(A,\alpha)\to(X',\tau')$ continua y tal que $f'g=v$. Entonces conmuta el diagrama

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única $h:(A,\alpha)\to(X,\tau)$ continua tal que $uh=g$ y $fh=1_A$, entonces h es sección de f y por lo tanto f es una identificación. Esto prueba que $\underline{A}\subseteq\underline{A}(\widetilde{M})$, con lo que la proposición queda demostrada.♦

Corolario 3.1 *Para una 1-clase M arbitraria, si $\underline{A} = \underline{A}(M)$ y si M' es la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}\,(M' \cup M)$.*

Demostración. En efecto:

$$\underline{A}\,(M' \cup M) = \underline{A}\,(M') \cap \underline{A}\,(M) = \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}\ . \blacklozenge$$

Al ser cerrada bajo intersecciones y estar ordenada por la contención, resulta la familia de *1-clases*, al igual que la familia de subcategorías bicorreflexivas de $\mathfrak{Top}$, una retícula cuyo elemento 0 es $\{\emptyset\}$ y cuyo elemento 1 es la familia de todas las funciones continuas y suprayectivas.

Recordemos además, que si M y N son un par de *1-clases* tales que $M \subseteq N$, entonces se tiene que $\underline{A}(N) \subseteq \underline{A}(M)$.

Queda entonces clara la estrecha relación que existe entre ambas familias.

Capítulo 4

La subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

Se ha llegado a la parte final de este trabajo, resta sólo definir y describir a la subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ que aparece en la pregunta que se quiere contextualizar. Para esto, se estudia a continuación un tipo especial de familias de funciones.

4.1. E-fibraciones

Definición de E-fibración.

Definición 4.1 *Sean, $E \subseteq \mathfrak{Top}$ y $f \in \mathfrak{Top}\left(\left(X, \tau\right), \left(Y, \sigma\right)\right)$. Se dice que f es una E-**fibración** si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de cualquier E-espacio.*

La clase de las E-fibraciones suprayectivas es *1-clase.*

Proposición 4.1 *Sea E cualquier clase no vacía de espacios topológicos y sea M_E la clase de las E-fibraciones suprayectivas. Entonces M_E es una 1-clase.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama de funciones continuas

donde $g_0 \in M_E$, $(Z, \zeta) \in E$, $(f_i)_{i \in 2}$ es el producto fibrado de $(g_i)_{i \in 2}$ y para cada $z \in Z$, $h_0\left(z\right) = (z, 0)$.

Como $g_0 \in M_E$, existe $H' \in \mathfrak{Top}\left(\left(Z, \zeta\right) \times I, \left(A_0, \alpha_0\right)\right)$ tal que:

$$g_0 H' = g_1 H \quad \wedge \quad H' h_0 = f_0 g$$

Puesto que $(f_i)_{i\in 2}$ es el producto fibrado $(g_i)_{i\in 2}$, existe una única $H'' \in \mathfrak{Top}\left((Z,\zeta)\times I,(X,\tau)\right)$ tal que:

$$f_0 H'' = H' \quad \wedge \quad f_1 H'' = H$$

Además, como

$$f_1\left(H'' h_0\right) = \left(f_1 H''\right) h_0 = H h_0 = f_1 g \quad \wedge \quad f_0\left(H'' h_0\right) = \left(f_0 H''\right) h_0 = H' h_0 = f_0 g$$

y $(f_i)_{i\in 2}$ es monofuente, se tiene que

$$H'' h_0 = g$$

Por consiguiente, H'' es un levantamiento, de lo cual se sigue que $f_1 \in M_E$. Por lo tanto, M_E es una *1-clase*.♦

Definición 4.2 *A la función f_1 se le llama E**-fibración inducida por** g_0 **a través de** g_1**.***

Definición 4.3 *Dados $E \subseteq \mathfrak{Top}$ y M_E la 1-clase de E-fibraciones suprayectivas, se denota a $\underline{A}\left(M_E\right)$ por $\underline{A}_E$.*

Definición 4.4 *Cuando $E = \mathfrak{Top}$, las E-fibraciones reciben el nombre de **fibraciones de Hurewicz**; debido a esto, la subcategoría asociada a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz se denotará como $\underline{A}_{\mathcal{H}}$.*

Resta tan sólo describir a esta subcategoría y a sus correflexiones, para facilitar esto, se prueban a continuación algunos resultados.

4.2. Fibraciones de Hurewicz

En adelante, el empleo de las letras φ y ψ remite a las funciones dadas en la definición 1.25 de los preliminares.

Proposición 4.2 *Dada* $p \in \mathfrak{Top}\left((E,\varepsilon),(B,\beta)\right)$, *son equivalentes:*

$(\cdot)$ p es fibración de Hurewicz

$(\cdot\cdot)$ Dado el diagrama:

con p_0 y q_0 las proyecciones al factor 0, entonces existe $F \in \mathfrak{Top}\left((Y,\sigma), \mathfrak{Top}_\kappa\left(I,(E,\varepsilon)\right)\right)$ tal que:

$(\cdot\cdot\cdot)$ Dada

$$W = \{w \in (E,\varepsilon) \times \mathfrak{Top}_\kappa\left(I,(B,\beta)\right) : w = (e,\alpha) \Rightarrow \alpha\,(0) = p\,(e)\}$$

existe $\Gamma \in \mathfrak{Top}\left((W,\omega), \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I,(E,\varepsilon)\right)\right)$ tal que:

con (π_1, π_2) el producto fibrado de (p, p_0).

Demostración. $(\cdot) \Rightarrow (\cdot\cdot)$ Sea $H = \psi(G)$; entonces H es una homotopía que comienza en pg y que se levanta en una homotopía $\widetilde{H}$ que comienza en g. Entonces, basta tomar $F = \varphi\left(\widetilde{H}\right)$.

$(\cdot\cdot) \Rightarrow (\cdots)$ Es inmediato, pero vale la pena notar que $[\Gamma(e,\alpha)](0) = e$ y $[p\Gamma(e,\alpha)](t) = \alpha(t)$.

$(\cdots) \Rightarrow (\cdot\cdot)$ Supóngase que se tiene el diagrama:

Defínase

$$
\begin{array}{rccc}
h: & (Y,\sigma) & \to & (W,\omega) \\
 & y & \mapsto & (g(y), G(y))
\end{array}
$$

Entonces:

$$[\Pi p \Gamma h](y) = [\Pi p \Gamma](g(y), G(y)) = \pi_2(g(y), G(y)) = G(y)$$

y

$$[q_0 \Gamma h](y) = [q_0 \Gamma](g(y), G(y)) = \pi_1(g(y), G(y)) = g(y)$$

Por consiguiente se tiene el siguiente diagrama:

$(\cdot\cdot) \Rightarrow (\cdot)$ Supóngase que se tiene el diagrama:

Tomando $G = \varphi(H)$ se tiene el siguiente diagrama:

Entonces, existe $F \in \mathfrak{Top}((Y,\sigma), \mathfrak{Top}_{\kappa}(I,(E,\varepsilon)))$ tal que:

Basta tomar $\widetilde{H} = \psi(F)$.

Observación 4.1 *Toda fibración suprayectiva de Hurewicz* $p : (E, \varepsilon) \to (B, \beta)$ *que tiene por codominio a un espacio* (B, β) *que es contráctil, es una retracción y, consecuentemente, un cociente.*

Demostración. Si (B, β) es contráctil, se tiene una homotopía

$$H : (B, \beta) \times I \to (B, \beta)$$

tal que para toda $b \in B$,

$$H(b, 0) = b_0 \quad \text{y} \quad H(b, 1) = b$$

con $b_0 \in B$. Sea $e_0 \in p^{-1}\{b_0\}$ y sea $c : (B, \beta) \to (E, \varepsilon)$ la función constante de valor e_0. Entonces conmuta el diagrama:

Como p es fibración de Hurewicz, existe $\widetilde{H} : (B, \beta) \times I \to (E, \varepsilon)$ continua tal que hace conmutar el diagrama

Ahora puede definirse una función $q : (B, \beta) \to (E, \varepsilon)$ haciendo $q(b) = \widetilde{H}(b, 1)$, para todo $b \in B$. Entonces

$$pq(b) = p\widetilde{H}(b, 1) = H(b, 1) = b$$

para todo $b \in B$, lo cual prueba que p es retracción.⧫

Lema 4.1 *Dada* $p : (E, \varepsilon) \to (B, \beta)$ *una fibración suprayectiva de Hurewicz, si* (B, β) *es un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces* p *es un cociente.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

donde (π_1, π_2) es el producto fibrado canónico de (p, p_0) y Γ es la función que existe por la proposición anterior. Se define

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathfrak{Top}_\kappa (I, (E, \varepsilon)) & \rightarrow & (W, \omega) \\ & \alpha & \mapsto & (q_0 (\alpha), \Pi p (\alpha)) \end{array}$$

que es continua puesto que sus funciones coordenadas son continuas. Además:

$$(r\Gamma)(w) = r(\Gamma(w)) = (p_0(\Gamma(w)), \Pi p(\Gamma(w))) = (\pi_1(w), \pi_2(w)) = w$$

de aquí que $r\Gamma = 1_W$ y, consecuentemente, r es una retración y, por tanto, un cociente.

π_1, π_2 son proyecciones y, por tanto, cocientes.

p_0 también es un cociente, pues es abierta, ya que por ser (B, β) localmente conectable por trayectorias, β tine una base de abiertos conectables por trayectorias. Si V es un elemento de dicha base, entonces:

$$p_0(K, V) = \begin{cases} V, \text{ si } 0 \in K \\ U, \text{ si } 0 \notin K \end{cases}$$

con U la componente por trayectorias que contiene a V, que es abierta (porque (B, β) es localmente conectable por trayectorias), y K un subconjunto compacto de (B, β).

Por consiguiente, dado que $p\pi_1 r = p_0 \pi_2 r$, se tiene que p es un cociente.♦

Definición 4.5 *Dados $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$, $p_0 : \mathfrak{Top}_\kappa (I, (X, \tau)) \rightarrow (X, \tau)$ la proyección al factor* 0 *y $x \in X$, se denota por $P(X, x)$ a $\left(p_0^{-1}(x), \kappa\mid_{p_0^{-1}(x)}\right)$, que es el espacio de curvas en (X, τ) con la topología compacto abierta que tienen origen en x.*

Lema 4.2 *Dados $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$ y $x \in X$, se tiene que $P(X, x)$ es contráctil y que*

$$\begin{array}{rccc} p_1: & P(X, x) & \rightarrow & (X, \tau) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

es una fibración de Hurewicz.

Demostración. (i) Sea

$$\begin{array}{rccl} H: & P(X,x)\times I & \to & P(X,x) \\ & (\alpha,t) & \mapsto & \beta \end{array}$$

donde $\beta(s)=\alpha(ts)$. Entonces:

$$\forall\alpha\in P(X,x), \qquad [H(\alpha,0)](s)=x \quad \wedge \quad [H(\alpha,1)](s)=\alpha(s)$$

Basta ver que H es continua para mostrar que $P(X,x)$ es contráctil.

Sea $(\alpha,t)\in P(X,x)\times I$ y sea (K,V) un elemento de la subbase de $P(X,x)$ tal que $H(\alpha,t)\in(K,V)$.

Sean $K_t=\{r\in I : r=tk, k\in K\}$ y J abierto en I tal que $K_t\subseteq J\subseteq\overline{J}\subseteq\alpha^{-1}(V)$ que existe por ser I normal.

Sea $\{J_\ell\}_L$ la colección de componentes conexas de J; entonces $\underset{\ell\in L}{\cup}J_\ell$ es una cubierta abierta de K_t, por lo que existe $M\subseteq L$ finito tal que $K_t\subseteq\underset{\ell\in M}{\cup}J_\ell$.

Sea

$$\varepsilon=\max\left\{\left|\sup(J_\ell\cap K)-\sup(J_\ell)\right|,\left|\inf(J_\ell\cap K)-\inf(J_\ell)\right|\right\}_M$$

Entonces $(\alpha,t)\in(K_t,V)\times\left(t-\frac{\varepsilon}{t},t+\frac{\varepsilon}{t}\right)$ y además $H\left((K_t,V)\times\left(t-\frac{\varepsilon}{t},t+\frac{\varepsilon}{t}\right)\right)\subseteq(K,V)$; por lo tanto, H es continua en (α,t).

(ii) Por la proposición anterior, basta mostrar que existe Γ continua tal que:

con (π_1,π_2) el producto fibrado canónico de (r_0,p_1). Defínase $\Gamma(\alpha,\beta)=\gamma$ con

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & I & \to & P(X,x) \\ & t & \mapsto & \delta_t \end{array}$$

donde $\delta_t : I\to(X,\tau)$ está dada por

$$\delta_t(s)=\begin{cases} x & \text{si } 4s\leq t \\ \alpha\left(\frac{4s-t}{4-2t}\right) & \text{si } t\leq 4s\leq 4-t \\ \beta\left(\frac{4s+t-4}{2s-1}\right) & \text{si } 4-t\leq 4s \end{cases}$$

Nótese que

$$\begin{array}{rccc} \psi(\gamma): & I \times I & \rightarrow & (X,\tau) \\ & (t,s) & \mapsto & \delta_t(s) \end{array}$$

es continua puesto que es el pegado de tres funciones continuas sobre un dominio cerrado que coinciden en la intersección. Puesto que ψ es una biyección entre espacios de funciones continuas, γ es continua; consecuentemente, Γ está bien definida.

Además,

$$\begin{array}{rccc} \psi\psi(\Gamma): & (W,\omega) \times I^2 & \rightarrow & (X,\tau) \\ & ((\alpha,\beta),(t,s)) & \mapsto & \delta_t(s) \end{array}$$

es continua, pues dados $((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0)) \in (W,\omega) \times I^2$ y $V \in \tau$ tales que $[\psi\psi(\Gamma)]((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0)) \in V$, existen $A, B \subseteq I$ intervalos abiertos tales que $(t_0,s_0) \in A \times B$ y $[\psi(\gamma_0)](A \times B) \subseteq V$.

Sea $K \subseteq A \times B$ un compacto tal que $(t_0,s_0) \in \mathring{K}$.

Sea $= \left\{ r \in I : r = \frac{4s-t}{4-2t}, \text{ con } (t,s) \in K \text{ y } t \leq 4s \leq 4-t \right\}$.

Sea $K_2 = \left\{ r \in I : r = \frac{4s+t-4}{2s-1}, \text{ con } (t,s) \in K \text{ y } 4-t \leq 4s \right\}$.

Entonces, $((\alpha_0,\beta_0),(t_0,s_0)) \in (K_1,V) \times (K_2,V) \times \mathring{K}$ y $[\psi\psi(\Gamma)]\left((K_1,V) \times (K_2,V) \times \mathring{K}\right) \subseteq V$.

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rccc} \psi(\Gamma): & (W,\omega) \times I & \rightarrow & P(X,x) \\ & ((\alpha,\beta),t) & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$$

es continua y, por consiguiente, Γ es continua.

Por construcción, $q_0\Gamma = \pi_1$ y $\Pi p_1 \Gamma = \pi_2$. Por lo tanto p_1 es fibración de Hurewicz.♦

Lema 4.3 *Dados* $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$, $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ *la familia de componentes conectables por trayectorias de* (X,τ) *y*

$$\begin{array}{rccc} 1: & \coprod\limits_{j \in J} \left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right) & \rightarrow & (X,\tau) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

se tiene que 1 *es fibración de Hurewicz.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

donde $\widetilde{H}$ es la única función que hace conmutar al diagrama, es decir, $\widetilde{H}(w,t) = H(w,t)$. Nótese que $\left(g^{-1}(X_j)\right)_J$ es una partición de (W,ω) y que cada $g^{-1}(X_j) \in \omega$.

Entonces, $(W,\omega) \cong \coprod_{j\in J} g^{-1}(X_j)$y por tanto, $(W,\omega)\times I \cong \coprod_{j\in J} g^{-1}(X_j)\times I$.

Dado que $\bigcup_{j\in J} \tau\mid_{X_j}$ es una base para la topología de $\coprod_{j\in J}\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)$, y que si $U\in\tau\mid_{X_j}$ entonces existe $V\in\tau$ tal que $V\cap X_j = U$, se tiene:

$$\widetilde{H}^{-1}(U) = \widetilde{H}^{-1}(V\cap X_j) = \widetilde{H}^{-1}(V)\cap\widetilde{H}^{-1}(X_j) = H^{-1}(V)\cap\left(g^{-1}(X_j)\times I\right)\in\omega$$

Por tanto, $\widetilde{H}$ es continua.⧫

Lema 4.4 *Dados* $(X,\tau)\in\mathfrak{Top}$*,* $\left(X_j,\tau\mid_{X_j}\right)_J$ *la familia de componentes conectables por trayectorias de* (X,τ) *y*

$$\begin{array}{rcll} p: & \coprod_{j\in J} P(X_j,x_j) & \to & (X,\tau) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

se tiene que p *es fibración suprayectiva de Hurewicz.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

Por los dos lemas anteriores, $\widetilde{H}$ es homotopía y cada p_j es fibración de Hurewicz que levanta a $\widetilde{H}\mid_{\widetilde{H}^{-1}(X_j)}$ en H_j.⧫

4.3. Descripción de la subcategoría $\underline{A}_{\mathcal{H}}$

Definición 4.6 *Se denotará por* $\mathcal{C}$ *a la clase de todos los espacios topológicos contráctiles.*

Observación 4.2 $\mathcal{C}$ *es una subcategoría de* $\mathfrak{Top}$*.*

Teorema 4.1 $\underline{\widetilde{\mathcal{C}}} = \underline{A}_{\mathcal{H}}$

Demostración. ($\subseteq$) En vista de la observación 4.1 se tiene que todo $\mathcal{C}$-espacio es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.

($\supseteq$) Dado (X,τ) un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, sea $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de (X,τ).

Sea $\{x_j\}_J$ tal que, para cada $j \in J$, $x_j \in X_j$.

Sea $\left(p_j : P(X_j, x_j) \to \left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)\right)_J$ la familia de proyecciones al factor 1 de cada $P(X_j, x_j)$.

Entonces, la función $p : \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) \to (X,\tau)$, con $p\mid_{P(X_j,x_j)} = p_j$, es un cociente, ya que es una fibración de Hurewicz y (X,τ) es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.

Como cada $P(X_j, x_j)$ es contráctil, $(X,\tau) \in \widetilde{\underline{\mathcal{C}}}$.♦

Corolario 4.1 *Dado (X,τ) un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, sea $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de (X,τ). Entonces, para cada $j \in J$, $X_j \in \tau$, y por consiguiente, $(X,\tau) \cong \coprod\limits_{j\in J} \left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)$.*

Demostración. $X_j \in \tau$ ya que la función $p : \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) \to (X,\tau)$, con $p\mid_{P(X_j,x_j)} = p_j$ es un cociente y $p^{-1}(X_j) = P(X_j, x_j)$.♦

Definición 4.7 *Dados $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$, $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de (X,τ) y*

$$\begin{array}{rccc} p: & \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) & \to & (X,\tau) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

se define

$$C_{\mathcal{H}}(X,\tau) := \left(\left\{p^{-1}(x)\right\}_{x\in X}, \tau'\right)$$

donde τ' es la topología cociente.

Observación 4.3 *Dados $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$, $\left(X_j, \tau\mid_{X_j}\right)_J$ la familia de componentes conectables por trayectorias de (X,τ) y*

$$\begin{array}{rccc} p: & \coprod\limits_{j\in J} P(X_j, x_j) & \to & (X,\tau) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha(1) \end{array}$$

existe una función continua y biyectiva

$$c : C_{\mathcal{H}}(X,\tau) \to (X,\tau)$$

tal que conmuta el diagrama:

siendo q el cociente natural.

Demostración. Pasar al cociente.♦

Teorema 4.2 *Para todo* $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$*, la función* $c : C_{\mathcal{H}}(X,\tau) \to (X,\tau)$ *es una* $\underline{A}_{\mathcal{H}}$*-correflexión.*

Demostración. Sea $a : (A,\alpha) \to (X,\tau)$ una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión. Entonces existe

$$\widetilde{p} : \coprod_{j \in J} P(X_j, x_j) \to (A,\alpha)$$

que hace conmutativo al diagrama:

Por ser a inyectiva y p una fibración de Hurewicz, se tiene el siguiente diagrama:

del cual es claro que $\widetilde{p}$ es una fibración de Hurewicz. Además, dado que $\widetilde{p}$ es suprayectiva y (A,α) es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, se sigue que $\widetilde{p}$ es un cociente. Observando el diagrama:

es claro que $\widetilde{p}$ y q son identificaciones correspondientes a la misma partición y consecuentemente existe un homeomorfismo $h : C_{\mathcal{H}}(X,\tau) \to (A,\alpha)$.♦

Lema 4.5 *Dada $p : (E, \varepsilon) \to (B, \beta)$ una fibración suprayectiva de Hurewicz, si (B, β) es un espacio localmente conectable por trayectorias, entonces p es un cociente.*

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

donde (π_1, π_2) es el producto fibrado canónico de (p, p_0) y Γ es la función que existe por la proposición anterior. Se define

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathfrak{Top}_\kappa\left(I, (E, \varepsilon)\right) & \to & (W, \omega) \\ & \alpha & \mapsto & \left(q_0\left(\alpha\right), \Pi p\left(\alpha\right)\right) \end{array}$$

que es continua puesto que sus funciones coordenadas son continuas. Además:

$$\left(r\Gamma\right)\left(w\right) = r\left(\Gamma\left(w\right)\right) = \left(q_0\left(\Gamma\left(w\right)\right), \Pi p\left(\Gamma\left(w\right)\right)\right) = \left(\pi_1\left(w\right), \pi_2\left(w\right)\right) = w$$

de aquí que $r\Gamma = 1_W$ y, consecuentemente, r es una retración y, por tanto, un cociente.

π_1, π_2 son proyecciones y, por tanto, cocientes.

p_0 también es un cociente, pues es abierta, ya que por ser (B, β) localmente conectable por trayectorias, β tine una base de abiertos conectables por trayectorias. Si V es un elemento de dicha base, entonces:

$$p_0\left(K, V\right) = \begin{cases} V, \text{ si } 0 \in K \\ U, \text{ si } 0 \notin K \end{cases}$$

con U la componente por trayectorias que contiene a V, que es abierta (porque (B, β) localmente conectable por trayectorias), y K un subconjunto compacto de (B, β).♦

Corolario 4.2 *Todo espacio localmente conectable por trayectorias es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.*♦

Observación 4.4 *No todo $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio es localmente conectable por trayectorias.*

Demostración. Considérese al conjunto:

$$Y = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad \wedge \quad x \in \left(\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{\mathbb{N}} \cup \{0\}\right)\right\} \cup \left([0, 1] \times \{0\}\right)$$

con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Éste es el **espacio peine**; se sabe que es contráctil y que no es localmente conectable por trayectorias.♦

4.3.1. $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexiones y fibraciones de Hurewicz

De [1]: "Tiene sentido preguntarse si toda $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión es una fibración de Hurewicz. Creemos que no es así, pero no conocemos ningún ejemplo de una $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión que no sea fibración de Hurewicz".

Del siguiente diagrama, y del lema 4.3, es claro que H tiene un levantamiento si, y sólo si, lo tiene $\widetilde{H}$.

Además, del diagrama siguiente, resulta que $\widetilde{H}$ se levanta si, y sólo si, se levanta en cada uno de sus cofactores

Por consiguiente, la pregunta se puede restringir al caso en que (X, τ) es conectable por trayectorias. Debido a esto, a partir de este momento se considerarán sólo espacios conectables por trayectorias.

Observación 4.5 *No todo espacio conectable por trayectorias es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio.*

Demostración. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} (0, 1-9t)\,, \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (3t-1, -2)\,, \text{ si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \left(1, 3\left[\sin 1 + 2\right]\left[t - \frac{2}{3}\right] - 2\right), \text{ si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \\ \left(\frac{1}{t}, \sin t\right), \text{ si } 1 \leq t \end{cases}$$

$(\cdot)$ El espacio $f([0, \infty)) \subseteq \mathbb{R}^2$, que se llama **circunferencia polaca**, es conectable por trayectorias.

$(\cdot\cdot)$ $[0, \infty)$ es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio pues es contráctil.

$(\cdots)$ Siendo c la $\underline{A}_{\mathcal{H}}$- correflexión de $f\left([0,\infty)\right)$, la función

$$\begin{array}{rlcl} \widetilde{f}: & [0,\infty) & \rightarrow & C_{\mathcal{H}}\left(f\left([0,\infty)\right)\right) \\ & t & \mapsto & c^{-1}\left\{f\left(t\right)\right\} \end{array}$$

es el $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflejo de f y es continua y biyectiva.

$(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ Dada $\alpha \in \mathfrak{Top}\left(I, f\left([0,\infty)\right)\right)$, se tiene que $\widetilde{\alpha} \in \mathfrak{Top}\left(I,[0,\infty)\right)$, donde para toda $s \in I$, $\widetilde{\alpha}\left(s\right) = f^{-1}\left(\alpha\left(s\right)\right)$. En efecto, si $x \in \mathbb{R}^{+}$, $f\mid_{[0,x)}^{f([0,x))}$es un homeomorfismo. Además, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha\left(I\right) \subseteq f\left([0,M)\right)$, pues si no fuese así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $t_n \in I$ tal que $f\left(t_n\right) \notin f\left([0,n)\right)$ y se podría formar una subsucesión convergente en I, $\left(t_{n_j}\right)_{J\subseteq\mathbb{N}}$. Si el límite de esta subsucesión es t, entonces $0 \leq f^{-1}\left(\alpha\left(t\right)\right) \leq \frac{2}{9}$; además, para cada $\varepsilon > 0$ existiría $\delta > 0$ tal que $\alpha\left(B_\delta\left(t\right)\right) \subseteq B_\varepsilon\left(\alpha\left(t\right)\right)$, de lo cual se seguiría que $B_\varepsilon\left(\alpha\left(t\right)\right) \cap f\left([0,\infty)\right)$ es conectable por trayectorias, lo que en general es falso.

$\Big(\text{—}\Big)$ Obsérvese el siguiente diagrama:

$\widetilde{f}^{-1}$ es continua, puesto que dada $[\alpha] \in C_{\mathcal{H}}\left(f\left([0,\infty)\right)\right)$, si $\alpha\left(1\right) = f\left(t\right)$, se tiene que $\widetilde{f}^{-1}\left([\alpha]\right) = f^{-1}\left(c\left[\alpha\right]\right) = f^{-1}\left(\alpha\left(1\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(t\right)\right) = t$ y se distinguen dos casos:

(a) Si $\frac{2}{9} < t$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$U = \left\{[\beta] \in C_{\mathcal{H}}\left(f\left([0,\infty)\right)\right) : \beta\left(1\right) \in B_\delta\left(f\left(t\right)\right)\right\}$$

se tiene que $\widetilde{f}^{-1}\left(U\right) \subseteq B_\varepsilon\left(t\right)$, donde U es abierto porque $q^{-1}\left(U\right) = \left(\left\{1\right\}, B_\delta\left(f\left(t\right)\right) \cap f\left([0,\infty)\right)\right)$ es un abierto subbásico en $P\left(f\left([0,\infty)\right), f\left(0\right)\right)$.

(b) Si $0 \leq t \leq \frac{2}{9}$, entonces para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{9}\right)$ se tiene que $\widetilde{f}\left(B_\varepsilon\left(t\right)\right)$ es abierto en $C_{\mathcal{H}}\left(f\left([0,\infty)\right)\right)$, pues dado $\gamma \in q^{-1}\left(\widetilde{f}\left(B_\varepsilon\left(t\right)\right)\right)$, si $\gamma\left(I\right) \subseteq f\left([0,a)\right)$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$U = \left\{\beta \in P\left(f\left([0,\infty)\right), f\left(0\right)\right) : \beta\left(1\right) \in B_\delta\left(f\left(t\right)\right) \quad \wedge \quad \beta\left(I\right) \subseteq f\left([0,a)\right)\right\}$$

se tiene que $\gamma \in U \subseteq q^{-1}\left(\widetilde{f}\left(B_\varepsilon\left(t\right)\right)\right)$, donde U es abierto porque

$$U = \left(\left\{1\right\}, B_\delta\left(f\left(t\right)\right)\right) \cap \left(I, V\left(f\left[0,a\right)\right)\right)$$

es un abierto básico en $P\left(f\left([0,\infty)\right), f\left(0\right)\right)$ si $V\left(f\left[0,a\right)\right) = \left(\mathbb{R}^2 - \left\{f\left(a\right)\right\}\right) \cap f\left([0,\infty)\right)$.

$\left(\dot{\overline{}}\right)$ Por lo tanto, $[0,\infty) \overset{\tilde{f}}{\cong} C_{\mathcal{H}}\left(f\left([0,\infty)\right)\right)$. Se sabe que la circunferencia polaca no es contráctil; en consecuencia, no es un $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-espacio, puesto que la contractibilidad se preserva bajo homeomorfismos.♦

Corolario 4.3 $\mathfrak{Top}\left(I, f\left([0,\infty)\right)\right) \cong \mathfrak{Top}\left(I,[0,\infty)\right)$.

Demostración. Se sigue del inciso $(\cdot\cdot\cdot)$ anterior y de la biyectividad de f.♦

Para determinar si una correflexión tiene la propiedad del levantamiento de homotopías resultará útil es siguiente resultado, recordando la equivalencia establecida en la proposición 4.2.

Proposición 4.3 *Para $(X,\tau) \in \mathfrak{Top}$ considérense, su $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión $c : C_{\mathcal{H}}\left((X,\tau)\right) \to (X,\tau)$ y el siguiente diagrama:*

con (W,ω) el producto fibrado correspondiente; entonces $\Gamma : (W,\omega) \to \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I, C_{\mathcal{H}}\left((X,\tau)\right)\right)$ existe si, y solamente si, $\Pi c : \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I, C_{\mathcal{H}}\left((X,\tau)\right)\right) \to \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I,(X,\tau)\right)$ es biyectiva.

Demostración. Por la biyectividad de c se tienen, la biyectividad de π_2 y la inyectividad de Πc. En efecto:

$$(\cdot)\ \forall \alpha \in \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I,(X,\tau)\right), \pi_2\ \left(\pi_1^{-1} c^{-1}\left\{p_0(\alpha)\right\}\right) = \alpha$$

$$(\cdot\cdot)\ \pi_2(x,\alpha) = \pi_2(y,\beta) \Rightarrow p_0\pi_2(x,\alpha) = p_0\pi_2(y,\beta) \Rightarrow c\pi_1(x,\alpha) = c\pi_1(y,\beta) \Rightarrow c(x) = c(y) \Rightarrow x = y$$

$$(\cdot\cdot\cdot)\ \Pi c(\alpha) = \Pi c(\beta) \Rightarrow c\alpha = c\beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

Además, si $\Pi c\Gamma = \pi_2$, de la suprayectividad de π_2 se sigue la suprayectividad de Πc. Por otro lado, si Πc es suprayectiva, basta definir

$$\begin{array}{rlcl} \Gamma : & (W,\omega) & \to & \mathfrak{Top}_{\kappa}\left(I, C_{\mathcal{H}}\left((X,\tau)\right)\right) \\ & w & \mapsto & (\Pi c)^{-1}\left(\pi_2(w)\right) \end{array}$$

♦

Observación 4.6 *La $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflexión de la circunferencia polaca es una fibración de Hurewicz.*

Demostración. Por la proposición 4.2, basta probar que existe Γ continua que hace conmutar al diagrama

Por el corolario 4.3, Πf es biyectiva. Por la proposición anterior, Γ existe y es única. Se verá que también es continua.

Sea (K, V) un abierto subbásico de $\mathfrak{Top}_\kappa\left(I, [0, \infty)\right)$ y sea $(t, \alpha) \in \Gamma^{-1}(K, V)$. Dada $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha(I) \subseteq [0, a)$ se tiene que si

$$U = \left\{(t, \beta) \in W : \beta(K) \subseteq V' \quad \wedge \quad t \in [0, a) \quad \wedge \quad \beta(I) \subseteq f([0, a))\right\}$$

donde V' es un abierto de $\mathbb{R}^2$tal que $f(\alpha(I)) \subseteq V' \cap f([0, a))$.

Entonces $U \in \omega$ porque es intersección de abiertos subbásicos, $(t, \alpha) \in U$ y $\Gamma(U) \subseteq (K, V)$.♦

Proposición 4.4 $\Pi c : \mathfrak{Top}_\kappa\left(I, C_{\mathcal{H}}((X, \tau))\right) \to \mathfrak{Top}_\kappa\left(I, (X, \tau)\right)$ *es biyectiva.*

Demostración. Considérese el diagrama

Dada $\alpha \in \mathfrak{Top}_\kappa\left(I, (X, \tau)\right)$, basta probar que existe $\alpha' \in \mathfrak{Top}\left(I, P(X, x)\right)$ tal que $p\alpha' = \alpha$, puesto que haciendo $\widetilde{\alpha} := q\alpha'$ resulta

$$c\widetilde{\alpha} = c(q\alpha') = (cq)\,\alpha' = p\alpha' = \alpha$$

Para exhibir a α' basta tomar $x = \alpha(0)$ y definir $\alpha'(t) := \beta$, donde $\beta(s) = \alpha(st)$. La continuidad de α' es consecuencia de la continuidad de la homotopía definida en (i) del lema 4.2.♦

Corolario 4.4 Γ *es biyectiva, es única y en caso de ser continua, es un homeomorfismo.*

Demostración. La biyectividad de Γ es consecuencia de la biyectividad de Πc y de π_2. De esto se infiere su unicidad. De aquí y de que (W, ω) sea el producto fibrado resulta que sea Γ un homeomorfismo.♦

Se abre a continuación un paréntesis para presentar a una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ que ayudará a la descripción de los $\underline{A}_{\mathcal{H}}-$correflectores.

4.3.2. La subcategoría de los espacios localmente conectables por trayectorias, $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$, es bicorreflexiva.

Proposición 4.5 *Si* (X, τ) *es un espacio topológico, son equivalentes:*
(a) (X, τ) *es localmente conectable por trayectorias.*
(b) *Las componentes por trayectorias de cualquier abierto* A *de* X *son abiertas.*
(c) τ *posee una base cuyos elementos son conectables por trayectorias.*

Demostración.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sean $A \in \tau$ y $a \in A$. Sea $c_A(a)$ la componente conexa por trayectorias de a en $(A, \tau|_A)$.

Dado $x \in c_A(a)$, existe N conectable por trayectorias tal que $x \in intN$ y $N \subseteq A$; entonces:

$$x \in N \subseteq c_A(x) = c_A(a)$$

Por tanto $c_A(a)$ es abierto.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea

$$\beta_X = \{B \in \mathsf{Pot}(X) : \exists A \in \tau, \exists a \in A, B = c_A(a)\}$$

la familia de componentes por trayectorias de abiertos de (X, τ). Por (b) $\beta_X \subseteq \tau$; además se sabe que todo abierto A de X se ve partido en las componentes por trayectorias $c_A(a)$, $a \in A$. Esto implica que β_X es una base de τ cuyos miembros son conectables por trayectorias.
$(c) \Rightarrow (a)$: Sea β una base para τ de conjuntos conectables por trayectorias. Entonces:

$$\forall A \in \tau, \forall x \in A, \exists B \in \beta._{\ni}.a \in B \subseteq A$$

Por lo tanto (X, τ) es un espacio localmente conectable por trayectorias.♦

Lema 4.6 *Dados* $f \in \mathfrak{Top}((X, \tau), (Y, \sigma))$, $y \in f(X)$ *y* $c(y)$ *la componente conexa por trayectorias de* y *en* (Y, σ) *entonces* $f^{-1}(c(y))$ *es unión de componentes por trayectorias de* (X, τ).

Demostración. Sean $y \in f(X)$, $c(y)$ la componente conexa por trayectorias de y en (Y, σ) y

$$\mathcal{C} = \left\{C \in \mathsf{Pot}(X) : \exists x \in f^{-1}(c(y)), C = c(x)\right\}$$

donde $c(x)$ es la componente conexa por trayectorias de x.

Como f es continua, entonces $f(c(x))$ es conectable por trayectorias, por tanto:

$$\forall x \in f^{-1}(c(y)), f(c(x)) \subseteq c(y)$$

de lo cual se sigue que $f(\cup\mathcal{C}) \subseteq c(y)$ y por tanto, $\cup\mathcal{C} \subseteq f^{-1}(c(y))$.

Por construcción, $f^{-1}(c(y)) \subseteq \cup\mathcal{C}$. Por lo tanto, $f^{-1}(c(y)) = \cup\mathcal{C}$.♦

Teorema 4.3 *La clase de los espacios localmente conectables por trayectorias, $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$, es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración.
Es claro que $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. Se verá que es cerrada bajo coproductos y bajo cocientes.

Sea $(X_i, \tau_i)_I \subseteq \underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$; dados $x \in \coprod_{i\in I}(X_i, \tau_i)$ y U abierto en $\coprod_{i\in I}(X_i, \tau_i)$ tal que $x \in U$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in (U \cap X_j) \subseteq \tau_j$; por lo tanto existe $V \in \tau_j$ conectable por trayectorias tal que $x \in V \subseteq (U \cap X_j)$. Puesto que V es abierto en $\coprod_{i\in I}(X_i, \tau_i)$, se tiene que $\coprod_{i\in I}(X_i, \tau_i) \in \underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$.

Por otro lado, dados $(X, \tau) \in \underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$ y $q : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ un cociente, se tiene que $(Y, \sigma) \in \underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$. En efecto, dadas $U \in \sigma$, $y \in U$ y $c(y)$ la componente por trayectorias de y en $(U, \sigma|_U)$, se tiene que $q^{-1}(c(y))$ es unión de componentes conectables por trayectorias de $q^{-1}(U)$, que es abierta; de aquí que sea abierta $c(y)$.♦

4.3.3. Acotamiento de la topología del $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflector.

Observación 4.7 $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}} \subsetneq \underline{A}_{\mathcal{H}}$

Demostración. La contención es inmediata del corolario 4.2. Para ver que la contención es propia, basta considerar al subespacio de $\mathbb{R}^2$ conocido como *escoba de bruja* cuyo conjunto subyacente es:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : x = t\left(1, \frac{1}{n}\right), t \in I, n \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup (I \times \{0\})$$

Este espacio es contráctil pero no es localmente conectable por trayectorias.♦

Observación 4.8 *Dado $(X, \tau) \in \mathfrak{Top}$, si (X, τ') es su $\underline{\mathbb{L}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{C}}}$-correflector y (X, τ'') es su $\underline{A}_{\mathcal{H}}$-correflector, se tiene que $\tau \subseteq \tau'' \subseteq \tau'$.*

Demostración. Puesto que $(X, \tau') \in \underline{A}_{\mathcal{H}}$, se tiene que $1 : (X, \tau') \to (X, \tau'')$ es continua porque es el correflejo de $1 : (X, \tau) \to (X, \tau')$.♦

Bibliografía

[1] G.B. Salicrup y R. Vázquez, *Fibraciones y Correflexiones* Anales del Instituto de Matemáticas, vol.10 (1970)

[2] L. Montoya Gallardo, *Fibraciones y Correflexiones* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, 2000

[3] Graciela B. Slicrup, *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas, textos 1, SMM(1993)

[4] Roberto Vázquez, *Reflexividad y Correflexividad*, Foro Red-Mat, vol.6 núm.5, `http://www.red-mat.unam.mx`

[5] Horst Herrlich, *Limit-operators and topological coreflections*, Trans. Amer. Math. Soc. vol146, 1969.