FUNCIONES ACTUARIALES COMO VARIABLES ALEATORIAS SOBRE UNA SOLA VIDA

Oscar Aranda Martínez
Nadia Araceli Castillo García
Abril 2010

En este primer documento se presenta el nuevo enfoque del cálculo actuarial, en donde las expresiones tradicionales definidas a partir del siglo XVIII para anualidades, primas de seguros y reserva matemática; basadas en valores determinísticos de tablas de probabilidad y tasa de interés, pueden ser vistas a partir del siglo XX, como expresiones que representan el valor esperado de una variable aleatoria asociada al tiempo, la cual depende de una función de probabilidad relativa al fallecimiento sobre un individuo y de un monto en riesgo como valor de indemnización. Por lo que al expresar las funciones en forma clásica, se pierde aspectos importantes relativos a la varianza de la variable aleatoria asociada a la función de probabilidad de fallecimiento.

Los modelos clásicos de las funciones actuariales del seguro de vida se han realizado considerando estimaciones en la que se involucra la tabla determinística de decremento [(a)] y la tasa de interés fija en el tiempo, tales casos han sido expuestos durante los siglos XVIII, XIX y parte del s. XX, un ejemplo de éstas son las siguientes.

- Esperanza de **v**ida abreviada para una persona de edad *x*. $$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x$$
- Esperanza de vida completa para una persona de edad *x*. $$\overset{o}{e}_x = \int_0^{\infty} {}_t p_x dt$$
- Seguro de vida entera, la cual otorga una indemnización en caso de fallecimiento de una unidad monetaria al final del año de aniversario. $$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_{k|}q_x$$
- Seguro de vida entera, la cual otorga una indemnización en caso de fallecimiento de una unidad monetaria al instante del fallecimiento. $$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^t \; {}_t p_x \; \mu_{x+t} \; dt$$
- Anualidad que provee un pago de una unidad monetaria anual al final de cada aniversario, durante los próximos *n*- años. $$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \; {}_k p_x$$
- Anualidad que provee un pago anual de una unidad monetaria fraccionada m-veces en el año y pagada a cada *m*-ésimo de tiempo, cuando $m \to \infty$, durante los próximos *n*- años. $$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t \; {}_t p_x \; dt$$

(a) En el caso más simple corresponde a la tasa de mortalidad y en su forma más elaborada, al decremento total que mide la probabilidad de sobrevivencia dentro de un grupo en estudio expuesto también a la incidencia de invalidez, pudiéndose integrar el efecto de la tasa de rotación de personal para el caso de sistemas de pensiones.

De hecho, estas expresiones realmente representan el ***valor esperado*** de una variable aleatoria, la cual depende de una ***función de probabilidad*** relativa al fallecimiento, asociada a un individuo de edad (x), por lo que al expresar las funciones en forma clásica, se pierde aspectos importantes relativos a la varianza de la variable aleatoria asociada a la función de probabilidad; este aspecto ya se habían apreciado en los trabajos de Menge (1937), Pollard y Pollard (1969), Follard (1976), Fibiger y Kellison(1971), Boyle (1974) y Taylor (1976), pero un acercamiento más detallado se puede citar a Hickman (1964) quien discute este aspecto.

Por lo tanto, esta ***función de probabilidad*** tiene que ver con la variable aleatoria del ***tiempo transcurrido hasta el fallecimiento***, si consideramos (x) para denotar a una ***vida de*** x ***años***. El ***tiempo futuro de vida*** de (x), será $X - x$, la que denotaremos como $T(x)$, la cual corresponde a una variable aleatoria de tipo continuo, es decir, toma valores tales como $t \geq 0$.

En forma semejante se puede definir una variable aleatoria discreta asociada con el tiempo de vida futuro, en la que denote el número de años futuros completados por (x) antes de su fallecimiento o el **tiempo de vida futuro truncado de (*x*)** , es decir, $K(x) = \lfloor T(x) \rfloor$, donde k toma valores $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Estos aspectos, rompen con el patrón establecido, durante los siglos XVIII, XIX y parte del s. XX, donde el cálculo de las funciones actuariales estuvo basado únicamente en el enfoque del valor presente determinístico, es decir, dada una función de mortalidad o de decrementos, se supone que la población a la cual se aplica seguirá dicho patrón y, en función de las cifras de siniestros que se van obteniendo al seguir dicho comportamiento, se van calculando los valores presentes de las obligaciones por cubrir.

El enfoque probabilístico del cálculo actuarial se fundamenta en la hipótesis de que, más que seguir una ley determinística, la ***mortalidad sigue un patrón aleatorio***. El punto de partida en esta dirección es el considerar el ***tiempo restante de vida de una persona como una variable aleatoria.***

Como se indicó al inicio, uno de los primeros trabajos bajo esta perspectiva, fue formulada por el actuario estadounidense Walter O. Menge, quien en su documento ***A statistical treatment of actuarial functions***, considera el tiempo restante de vida de una persona de edad (x) como una variable aleatoria de tipo continuo, simbolizada en la notación actuarial internacional, como $T(x)$.

Las funciones biométricas tales como las probabilidades de fallecimiento, sobrevivencia o la tasa instantánea de mortalidad se obtienen ahora como características numéricas de esta variable aleatoria. Por ejemplo, la función de distribución acumulativa {1} de $T(x)$, $F_{T(x)}$, es

$$F_{T(x)}(t) = P\left[T(x) \leq t\right] = {}_t q_x , \quad \forall \quad t \geq 0$$

De esta manera, ${}_t p_x = 1 - F_{T(x)}(t)$ y $f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t}$, de donde se obtiene [(b)]

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T(x)}(t)}{1 - F_{T(x)}(t)}$$

En forma semejante para la variable aleatoria discreta $g_{K(x)}(k) = G'_{K(x)}(k) = {}_{k|}q_x = {}_k p_x \; q_{x+k}$, $k = 0,1,2,\ldots$

En esta virtud, la expresión relativa a la ***esperanza de vida completa*** se puede formular como el *Valor Esperado* de la variable aleatoria $T(x)$.

$$\overset{o}{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t \; f_{T(x)}(t)\,dt$$

o bien.

$$\overset{o}{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty t \; {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

que al integrar por partes, considerando que [{2}] : $f_{T(x)}(t)\,dt = -d\,{}_t p_x$, se tiene

$$\overset{o}{e}_x = E[T(x)] = \int_0^\infty {}_t p_x \; dt$$

y su varianza de $T(x)$, como

$$Var[T(x)] = E[T(x)^2] - E[T(x)]^2$$

$$= 2\int_0^\infty t \, {}_t p_x \; dt - \overset{o}{e}_x{}^2$$

donde

$$E[T(x)^2] = \int_0^\infty t^2 \; {}_t p_x \; \mu_{x+t} \; dt$$
$$= 2\int_0^\infty t \; {}_t p_x \; dt$$

De forma semejante, la ***esperanza de vida abreviada,*** se formula como el *valor esperado* de la variable aleatoria $K(x)$, es decir.

$$e_x = E[K] = \sum_{k=0}^\infty k \; g_{K(x)}(k)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty k \; {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^\infty k \; {}_k p_x \; q_{x+k}$$
$$= \sum_{k=0}^\infty {}_{k+1}p_x$$

(b) Este enfoque puede extenderse a una teoría más general de la sobrevivencia, donde el concepto se aplica, ya no únicamente a seres humanos, sino a una entidad abstracta, que lo mismo puede ser un organismo como una empresa o bien un componente de un dispositivo electrónico, dando origen, en este último caso, a la *teoría de la confiabilidad*.

Siguiendo el mismo proceso utilizado en el modelo continuo, tenemos

$$\begin{aligned} Var\left[K\right] &= E\left[K^2\right] - E\left[K\right]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)_{k+1}p_x - e_x^2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} E\left[K^2\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}k^2\ {}_k p_x\ q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\ {}_{k+1}p_x \end{aligned}$$

Para completar el análisis en relación a la esperanza de vida (completa o abreviada) para un periodo de *n* años, consideremos el símbolo L_x, que representa el número esperado total de años de vida entre las edades x y $x+1$, de los sobrevivientes del grupo inicial de recién nacidos.

$$L_x = \int_0^1 t\ l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt\ +\ l_{x+1}$$

donde la integral contabiliza los años vividos por aquellos que murieron entre las edades (x) y $(x+1)$ y el término l_{x+1} contabiliza los años vividos entre las edades (x) y $(x+1)$ de los que sobrevivieron a la edad $x+1$. Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} L_x &= -\int_0^1 t\ d\ l_{x+t} + l_{x+1} \\ &= -t\ l_{x+t}\Big|_0^1 + \int_0^1 l_{x+t}\ dt\ +\ l_{x+1} \\ &= \int_0^1 l_{x+t}\ dt \end{aligned}$$

En forma más general, los años vividos por aquellos que murieron entre las edades (x) y $(x+n)$ y el término $n\ l_{x+n}$ contabiliza los años vividos entre las edades (x) y $(x+n)$ de los que sobrevivieron a la edad $(x+n)$. Integrando por partes se tiene

$$_n L_x = \int_0^n t\ l_{x+t}\ \mu_{x+t}\ dt\ +\ n\ l_{x+n} = \int_0^n l_{x+t}\ dt \qquad (1)$$

En esta virtud.

Esperanza de vida completa a n-años

$$\begin{aligned} \overset{o}{e}_{x:\overline{n}|} &= E[T(x)] = \int_0^n t\ \ f_{T(x)}(t)dt\ +\ n\ \ {}_n p_x \\ &= \int_0^n t\ \ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt\ +\ n\ \ {}_n p_x \qquad (2) \\ &= \int_0^n {}_t p_x\ dt \end{aligned}$$

Para el caso discreto la ***Esperanza de vida abreviada a n-años***

$$
\begin{aligned}
e_{x:\overline{n|}} &= E[K] = \sum_{k=0}^{n-1} k\ g_{K(x)}(k)\ +\ n\ \ {}_n p_x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\ \ {}_{k|}q_x + n\ \ {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} k\ \ {}_k p_x\ q_{x+k} +\ n\ \ {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n} {}_k p_x
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Los procesos anteriores, sólo corresponden a la expectativa de contabilización del tiempo, ahora bien, si bajo estos conceptos pensamos el modelar la existencia de un pago o conjunto de pagos asociados a la función de probabilidad, entonces en el primer caso estaremos conceptualizando el seguro de vida y en el seguro el concepto de anualidad.

Los ***seguros de vida*** están diseñados para reducir el efecto financiero del evento aleatorio de muerte; debido a la naturaleza del riesgo a largo plazo, el monto de las ganancias por la inversión del recurso para este fin, proporciona un elemento significativo de incertidumbre.

En los ***seguros de vida***, el tamaño y la fecha del pago dependerán sólo de la fecha de la muerte del asegurado. En otras palabras, nuestro modelo se construirá en términos de funciones de la variable aleatoria de tipo continuo $T(x)$, donde la suma asegurada **se pagará al instante del fallecimiento** $(b_t = 1)$ o bien dada la naturaleza discreta de las probabilidades definidas en una *tabla de mortalidad* para cada edad, la q_x que representa la probabilidad constante por intervalo anual, de que una persona de edad (*x*) fallezca dentro del intervalo del año siguiente, es decir, que el fallecimiento se de entre las edades (*x*) y (*x*+1), por lo que bajo este supuesto **el pago de la indemnización será al final del año (**$b_{k+1} = 1,\ \ k = 0,1,,2,...$); a este concepto de contabilizar el tiempo, corresponde a la variable aleatoria de tipo discreto $K(x)$.

En esta virtud, un ***seguro de vida a plazo de*** n ***años***, proporciona un pago sólo si el asegurado muere dentro del plazo de n años de un seguro que comienza en su expedición.

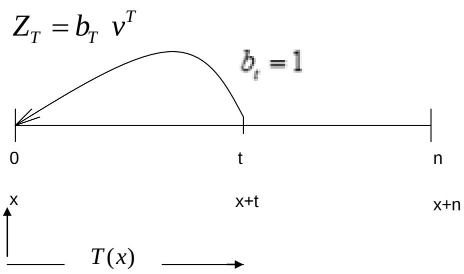
Si una unidad **se pagará en el momento de la muerte de** (x)**,** entonces

$$
b_t = \begin{cases} 1\ ; & t \le n \\ 0\ ; & t > n \end{cases}
$$

$$
v_t = v^t\ \ ; \quad t \ge 0
$$

$$
Z_T = \begin{cases} v^T & ; \quad T \le n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases}
$$

La siguiente gráfica muestra cada una de las variables involucradas en una línea que simboliza el tiempo asociado a (x).



$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[z_T]$$

Cuando $n \to \infty$, se tiene

$$\bar{A}_x = E[z_T]$$

El Valor Presente Actuarial o Prima Neta Única para el seguro a plazo de n años con una unidad pagadera al momento de la muerte de (x) es $E[Z_T]$, denotada por $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, puede calcularse al reconocer a Z_T como una función de $T(x)$, donde la función de probabilidad (*f.p*) es ${}_t p_x\ \mu_{x+t}$.

así

$$E[Z_T] = \int_0^n z_t\ f_{T(x)}(t)\,dt \tag{4}$$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z_T] = \int_0^n v^t\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt \tag{5}$$

El momento j-ésimo de la distribución de Z_T puede determinarse mediante

$$E\left[Z_T{}^j\right] = \int_0^n (z_t)^j\ f_{T(x)}(t)\,dt$$

Al sustituir $z_t = v^t$ y la función de probabilidad asociada, se tiene.

$$E\left[Z_T{}^j\right] = \int_0^n \left(v^t\right)^j\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Donde el momento j-ésimo de Z es igual a la prima neta única de un seguro a plazo de n años para un monto de una unidad pagadera al momento de la muerte de (x), o bien es igual a j veces la fuerza de interés determinada por $j\ \delta$, es decir.

$$E\left[Z_T{}^j\right] = \int_0^n e^{-(\delta j)t}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

Esta propiedad de los momentos de orden superior es válida, generalmente, para seguros que pagan una unidad cuando la fuerza de interés es determinística, constante o no. Estableceremos suficientes condiciones para esto en el siguiente teorema.

Teorema:

Para un seguro sobre (x), sea δ_t la fuerza de interés en el tiempo t; y sean, b_t y v_t, las funciones de beneficio y descuento, respectivamente. Si $\forall\ t \geq 0$, $b_t^j = b_t$, entonces $E\left[Z_T{}^j\right]$ determinada con la fuerza de interés δ_t, es igual $E\left[Z_T\right]$ considerando la fuerza de interés $j\delta_t$ para $\forall\ \ j > 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} E\left[Z_T{}^j\right] &= E\left[\left(b_T\ v_T\right)^j\right] \\ &= E\left[b_T^j\ v_T^j\right] \\ &= E\left[b_T\ v_T^j\right] \end{aligned}$$

En general,

$$v_t = \exp\left(-\int_0^t \delta_s ds\right) \tag{6}$$

en donde t es el tiempo transcurrido desde la expedición de la póliza hasta la muerte del asegurado. Elevando ambos lados de la expresión (6) a la potencia j, tenemos

$$v_t^j = \exp\left(-\int_0^t j\ \delta_s ds\right),$$

es decir, v_t, a la fuerza de interés $j\ \delta_t$.

Del Teorema resulta que

$$Var\left[Z_T\right] = {}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - \left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)^2 \tag{7}$$

donde ${}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ es la prima neta única para un seguro a n años para una unidad calculada a la fuerza de interés 2δ.

Como se demostró, el Teorema es para un seguro que paga la suma asegurada al momento de la muerte t. Puede extenderse a seguros en los que la suma es pagada en un tiempo, que es una función del momento de la muerte. Esto se logra al sustituir t por el límite superior de la integral de la expresión (6) con la función del momento de la muerte.

En el caso del ***seguro de vida entera,*** prevé un pago después de la muerte del asegurado en cualquier tiempo en el futuro. Si el pago previsto debe ser el monto de una unidad al momento de la muerte de (x), entonces

$$\begin{aligned} b_t &= 1 \quad ; \quad t \geq 0 \\ v_t &= v^t \quad ; \quad t \geq 0 \\ Z &= v^T \quad ; \quad T \geq 0 \end{aligned}$$

La prima neta única es

$$\bar{A}_x = E\left[Z_T\right] = \int_0^\infty z_t \, f_{T(x)}(t)\, dt = \int_0^\infty v^t \, {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, dt \tag{8}$$

Como se podrá observar, el seguro de vida entera, es el caso límite del seguro temporal a n años, cuando $n \to \infty$; por lo tanto, la varianza de Z_T, se puede plantear de igual forma como el caso del seguro temporal; es decir, en forma general el considerar la expresión (4), $E\left[Z_T\right] = \int_0^n z_t \, f_{T(x)}(t)\, dt$ y $E\left[{Z_T}^j\right] = E\left[\left(b_T \; v_T\right)^j\right]$, con las características especiales del beneficio b_t, se pueden definir por ejemplo seguros de tipo creciente a cada instante $\left(\bar{I}\ \bar{A}\right)_x$ o creciente por año $\left(I\ \bar{A}\right)_x$, en forma semejante los de tipo decreciente, ya sea temporales $\left(D\ \bar{A}\right)^1_{x:\overline{n|}}$ o de vida entera $\left(D\ \bar{A}\right)_x$.

Existe el ***seguro*** de tipo ***dotal puro***, que otorga la suma asegurada al propio contratante en caso de sobrevivencia al final del periodo pactado al momento de la expedición del seguro o de tipo mixto, llamado simplemente ***seguro dotal***, que involucra la cobertura de fallecimiento y de sobrevivencia.

En la práctica de los seguros de vida, se consideran valores tabulares bajo el arreglo edad (x) y probabilidad q_x asociada; definidas en una ***tabla de mortalidad*** y bajo el supuesto de distribución uniforme de siniestralidad por año; se dice entonces que éstas, están asociada a la variable aleatoria $K(x)$ ya definida anteriormente.

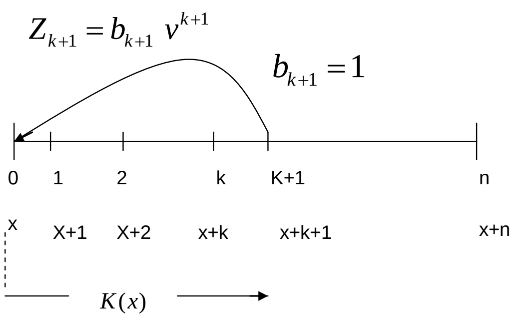
En esta virtud, definamos $Z_{K+1} = b_{k+1}\ v_{k+1}$ como la variable aleatoria del valor presente de la indemnización a tasa fija de una unidad monetaria, $b_{k+1} = 1, \quad \forall\ k = 0,1,2,3,...,$ en específico, si limitamos a *n* periodos de cobertura el seguro, definimos entones así un ***seguro temporal a*** n ***años***, donde el monto de indemnización de una unidad es pagada al final del año *k+1* de fallecimiento, si (*x*) fallece entre las edades (*x+k*) y (*x+k+1*), en forma particular.

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1\ ; & k = 0,1,...,n-1 \\ 0\ ; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}$$

$$Z_{K+1} = \begin{cases} v^{k+1}\ ; & k = 0,1,...,n-1 \\ 0\ ; & en \text{ otro caso} \end{cases}$$

Para fines ilustrativos, la siguiente gráfica muestra este proceso



La prima neta única para este seguro está dada por

$$E\left[Z_{K+1}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\ g_{K(x)}(k) \tag{9}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left[Z_{K+1}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k|}q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\ {}_{k}p_{x}\ \ q_{x+k} \tag{10}$$

El Teorema, también se mantiene para los seguros en donde la indemnización es pagada al final del año del fallecimiento; realizando cambios apropiados en la notación, por ejemplo, para el seguro temporal a n años,

$$Var\left[Z\right] = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} - \left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right)^{2} \tag{11}$$

Donde

$${}^{2}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\ {}_{k}p_{x}\ \ q_{x+k}$$

Para un ***seguro de vida entera*** expedido a edad (x), el modelo puede obtenerse haciendo $n \to \infty$ en el modelo para el seguro a plazo de n años. Para la prima neta única tenemos

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_k p_x \; q_{x+k} \tag{12}$$

multiplicando ambos lados de (12) por l_x se genera

$$l_x A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \; d_{x+k} \tag{13}$$

La ecuación (12) muestra el balance, al tiempo de expedición de la póliza, entre el fondo agregado de primas netas únicas para l_x vidas aseguradas a la edad x y el flujo de fondos de acuerdo a sus muertes esperadas. Es una ecuación de interés compuesto del valor establecido sobre la base del valor esperado.

La expresión [c],

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} \; d_{x+k} \quad , \tag{14}$$

es la parte del fondo a la expedición que, junto con el interés a la tasa asumida, proveerá los pagos para las muertes esperadas después del $r-$ésimo año del seguro.

La acumulación de (14) a la tasa de interés asumida para r años produce

$$\sum_{k=r}^{\infty} v^{k-r+1} \; d_{x+k} \, , \tag{15}$$

la cantidad esperada en el fondo después de r años del seguro. La comparación entre la expresión (15) con (13) demuestra que es $l_{x+r} \; A_{x+r}$. La diferencia entre esta cantidad y el fondo real se debe a desviaciones de los fallecimientos reales de los esperados de acuerdo a la tabla de mortalidad adoptada y a las desviaciones entre el ingreso real de interés y la tasa hipotética asumida en el modelo.

En forma muy general el considerar la expresión (9) y el Teorema, con características especiales del beneficio b_{k+1} a otorgar, se pueden definir seguros creciente por año, en forma semejante los de tipo decreciente, ya sea temporales o de vida entera, por ejemplo, $(I\ A)_x$, $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$, etc.

(c) El desarrollo de la expresión (14), puede simplificarse considerando el proceso formulado por el matemático danés Nikolaus Tetens para el cálculo de primas, (1785) en su obra *Introduction to the calculation of life annuities*, donde se introduce el uso de símbolos que simplifican el proceso laborioso de sumas a un valor denominado conmutación, así por ejemplo $M_{x+k} = \sum_{k=r}^{\infty} v^{k+1} d_{x+k} \cdot \left[\frac{v^x}{v^x}\right] = \sum_{k=r}^{\infty} v^{x+k+1} d_{x+k} = \sum_{k=r}^{\infty} c_{x+k}; \qquad v^x \neq 0$

En las expresiones anteriores, el pago es dependiente del fallecimiento y este beneficio b_t o b_{k+1}, se otorga a un beneficiario, lo que proporciona diversas formas de los seguros de vida.

Casos especiales del Seguro

1.- Donde sólo se cubre la sobrevivencia, en este tipo de seguro, la suma asegurada se otorga al propio asegurado, denominado ***seguro dotal puro a*** n **años**, el cual prevé un pago al final de n años si y sólo si el asegurado sobrevive al menos n años desde la expedición de la póliza. Si el monto pagadero es una unidad, entonces

$$\begin{aligned} b_t &= \begin{cases} 0 & ; \quad t \le n \\ 1 & ; \quad t > n \end{cases} \\ v_t &= v^n \quad ; \quad t \ge 0 \\ Z &= \begin{cases} 0 & ; \quad T \le n \\ v^n & ; \quad t > n \end{cases} \end{aligned} \qquad (16)$$

El único elemento de incertidumbre en este tipo de seguro es si ocurrirá o no la reclamación. El tamaño y el tiempo del pago, si ocurre una reclamación, están predeterminados. La prima neta única se denota como $A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$. En la expresión $Z = v^n \Upsilon$, Υ es el indicador del evento de la sobrevivencia a la edad $(x+n)$. Esta Υ tiene el valor 1 si el asegurado sobrevive a la edad $(x+n)$ y 0 en otro caso. La prima neta única es

$$A_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = E[Z] = v^n E[\Upsilon] = v^n \, {}_n p_x$$

y

$$Var[Z] = v^{2n} \; Var[\Upsilon] = v^{2n} \, {}_n p_x \; {}_n q_x \qquad (17)$$

2.- El seguro que combina la sobrevivencia y el fallecimiento, denominado ***seguro dotal a*** n ***años***, como ya se indicó, prevé una cantidad pagadera ya sea después de la muerte del asegurado o a la sobrevivencia del mismo al final del plazo de n años; lo que ocurra primero. Para fines de estudio, se desarrollará cuando el seguro es por el monto de una unidad y el beneficio por fallecimiento es pagadero en el momento de la muerte, (un razonamiento semejante se puede aplicar cuando la suma asegurada se paga al final del aniversario anual de la póliza), entonces

$$\begin{aligned} b_t &= 1 \; ; \quad t \ge 0 \\ v_t &= \begin{cases} v^t & ; \quad t \le n \\ v^n & ; \quad t > n \end{cases} \\ Z &= \begin{cases} v^T ; & T \le n \\ v^n ; & T > n. \end{cases} \end{aligned} \qquad (18)$$

La prima neta única del ***seguro dotal a** n **años*** se denota por $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ para el caso de la variable aleatoria $T(x)$ y $A_{x:\overline{n}|}$ para la variable aleatoria $K(x)$.

Este seguro puede ser visto como la combinación de un seguro a plazo de n años y de un dotal puro a n años, cada una por el monto de una unidad; en esta virtud, definamos entonces como Z_1 la variable aleatorias del seguro a plazo de n y Z_2 como la variable aleatoria de un dotal puro a n años.

Es decir,

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & ; \quad T \le n \\ 0 & ; \quad T > n \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} 0 & ; \quad T \le n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases} \tag{19}$$

se sigue que

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 \tag{20}$$

donde

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & ; \quad T \le n \\ v^n & ; \quad T > n \end{cases}$$

y tomando esperanzas en ambos lados

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \tag{21}$$

Considerando que $Z_3 = Z_1 + Z_2$, podemos determinar la varianza como

$$Var[Z_3] = Var[Z_1] + Var[Z_2] + 2Cov[Z_1, Z_2]. \tag{22}$$

Mediante el uso de la relación

$$Cov[Z_1, Z_2] = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2] \tag{23}$$

y observando que la relación entre $Z_1 Z_2 = 0$; $\forall \quad T$, ya que uno de ellos es siempre 0 y el otro es positivo, tenemos

$$Cov[Z_1, Z_2] = -E[Z_1]E[Z_2] = -\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \quad \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}. \tag{24}$$

Sustituyendo (7), (17) y (24) en (22), se obtiene la expresión para la $Var[Z_3]$ en términos de primas netas únicas para un seguro de plazo a n años y un dotal puro.

Finalmente, el coeficiente de correlación de Z_1 y Z_2 no es -1 porque no son funciones lineales una de la otra.

1. En caso teórico y no práctico - *al menos hasta el momento, ya que la operación del seguro de vida se centra en cubrir el fallecimiento a partir de la fecha de expedición de la póliza*-, se tiene el llamado ***seguro diferido*** m ***años***, el cual prevé una indemnización después de la muerte del asegurado si y sólo, si el asegurado muere al menos m años después de la expedición de la póliza. La indemnización que se paga y el plazo del seguro puede ser cualquiera de los considerados anteriormente. Por ejemplo, sea un seguro de vida entera diferido a m años, con un monto unitario que se paga al momento del fallecimiento, por lo anterior, se tiene las siguientes variables.

$$b_t = \begin{cases} 1 & t > m \\ 0 & t \le m \end{cases}$$

$$v_t = v^t \qquad t > 0$$

$$Z = \begin{cases} v^T & T > m \\ 0 & T \le m \end{cases}$$

La prima neta única se denota por ${}_{m|}\overline{A}_x$ y equivale a

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = E\left[Z\right] = \int_m^\infty z \cdot f_T(t)\ dt = \int_m^\infty v^t\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt \tag{25}$$

O bien, como un seguro que inicia a edad (x+t) y con fecha de inicio de operación a edad (x), por lo tanto depende el seguro de la sobrevivencia de (x) a edad (x+t), en esta virtud, sea $t = m + s$ y realizando las adecuaciones necesarias en la expresión (25), se tiene

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = \int_m^\infty v^{m+s}\ {}_m p_x\ \ {}_s p_{x+m}\ \mu_{x+m+s}\ ds \tag{26}$$

Expresión que depende ahora del tiempo sobre s; realizando las adecuaciones necesarias se tiene

$$ {}_{m|}\overline{A}_x = v^m\ {}_m p_x \int_0^\infty v^s\ {}_s p_{x+m}\ \mu_{x+m+s}\ ds = {}_m E_x\ \overline{A}_{x+m} \tag{27}$$

Muy semejante el proceso, si fuera temporal a n-años.

$$ {}_{m|n}\overline{A}_x = {}_{m|}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = v^m\ {}_m p_x \int_0^n v^s\ {}_s p_{x+m}\ \mu_{x+m+s}\ ds = {}_m E_x\ \overline{A}^{1}_{x+m\,:\,\overline{n}|} \tag{28}$$

El mismo proceso se tendría para el caso de seguros diferidos de tipo discreto.

Para fines didácticos, se muestra un resumen de los seguros más comunes.

Seguros que se pagan en forma inmediata al fallecimiento.

TABLA 1

Tipo de Seguro	Función de: Beneficios b_t	Descuento v_t	Valor Presente z_t	Prima Neta Única	Momento Superior
Vida Entera	1	v^t	v^t	$\bar{A}_x$	*1
Temporal a n años	$1 \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$v^t \;;\; t \le n$ $0 \;;\; t > n$	$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	*1
Dotal puro a n años	$0 \quad t \le n$ $1 \quad t > n$	v^n	$0 \;;\; t \le n$ $v^n \;;\; t > n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}$	*1
Dotal a n años	1	$v^t \quad t \le n$ $v^n \quad t > n$	$v^t \;;\; t \le n$ $v^n \;;\; t > n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}$	*1
Temporal a n años, diferido m años	$1 \quad m < t \le n+m$ $0 \quad t \le m,\ t > n+m$	v^t	$v^t \quad m < t \le n+m$ $0 \quad t \le m,\ t > n+m$	${}_{m\rvert}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$ o bien ${}_{m\rvert n}\bar{A}_x$	*1
Creciente anual Temporal n años	$[t+1] \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$[t+1]v^t \;;\; t \le n$ $0 \;;\; t > n$	$(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	*2
Decreciente anual Temporal n años	$n-[t] \quad t \le n$ $0 \quad t > n$	v^t	$(n-[t])v^t \;;\; t \le n$ $0 \;;\; t > n$	$(D\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	*2
Vida Entera Creciente Mensual	$\dfrac{[t\,m+1]}{m}$	v^t	$\dfrac{v^t[t\,m+1]}{m}$	$(I^{(m)}\bar{A})_x$	*2

TABLA 1

Las variables b_t, v_t y z_t están definidas únicamente para $t \ge 0$

*1 El momento j-ésimo es igual a la prima neta única a j veces la fuerza de interés dada y denotada por ${}^{j}A$ para $j > 1$. Entonces la varianza es ${}^{2}A - A^2$, simbólicamente.

*2. Determinada directamente a partir de la definición, $E\left[Z^j\right]$

En forma semejante se muestra un resumen de los seguros más comunes para seguros que se pagan al final del año de fallecimiento.

Seguros que se pagan al final al fallecimiento.

TABLA 2

Tipo de Seguro	Función de: Beneficios b_{k+1}	Función de: Descuento v_{k+1}	Función de: Valor Presente z_{k+1}	Prima Neta Única	Momento Superior
Vida Entera	1	v^{k+1}	v^{k+1}	A_x	*1
Temporal a n años	1 $\quad k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $\quad k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	v^{k+1} ; $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 ; $k=n,n+1,\ldots$	$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	*1
Dotal a n años	1	v^{k+1}; $k=0,1,\ldots,n-1$ v^n ; $k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}; $k=0,1,\ldots,n-1$ v^n ; $k=n,n+1,\ldots$	$A_{x:\overline{n}\rceil}$	*1
Temporal a n años, diferido m años	1 $\quad k=m,m+1,\ldots,m+n-1$ 0 $\quad =\begin{cases} k=0,\ldots,m-1 \\ k=m+n,\ldots \end{cases}$	v^{k+1}	v^{k+1}; $k=m,m+1,\ldots,m+n-1$ $0=\begin{cases} k=0,\ldots,m-1 \\ k=m+n,\ldots \end{cases}$	${}_{m\vert}A^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$ o bien ${}_{m\vert n}A_x$	*1
Creciente anual Temporal n años	$k+1$ $\quad k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $\quad k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1}$; $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 ; $k=n,n+1,\ldots$	$(IA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	*2
Decreciente anual Temporal n años	$n-k$ $\quad k=0,1,\ldots,n-1$ 0 $\quad k=n,n+1,\ldots$	v^{k+1}	$(n-k)v^{k+1}$; $k=0,1,\ldots,n-1$ 0 ; $k=n,n+1,\ldots$	$(DA)^{1}_{x:\overline{n}\rceil}$	*2
Vida Entera Creciente	$k+1$ $\quad k=0,1,\ldots$	v^{k+1}	$(k+1)v^{k+1}$; $k=0,1,\ldots$	$(I\ A)_x$	*2

$b_{k+1}, v_{k+1}, z_{k+1}$ Definidos para valores no negativos enteros de k

*1 El teorema se mantiene, por lo tanto $Var[Z] = {}^2A - A^2$, simbólicamente.

*2 El teorema no se mantiene.

En la práctica, las tablas de mortalidad que se publican contienen usualmente tabulaciones, por edades individuales de las funciones básicas $q_x,\ l_x,\ d_{x,}$ principalmente y corresponden a edades enteras, para el caso del seguro de tipo discreto, no necesariamente en la práctica se pagará al final del año póliza, ya que por disposiciones normativas este pagos debe ser casi inmediato, una vez dadas las pruebas necesarias que originen su pago o indemnización, en esta virtud, resulta interesante determinar la aproximación del caso discreto al caso continuo, por la razón antes comentada.

Para tal efecto empezaremos el estudio de estas relaciones con un análisis de la prima neta única para el seguro de vida entera que paga una unidad de beneficio al momento del fallecimiento. De la expresión (8) tenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \int_0^{\infty} v^t\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} v^t\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1} v^{k+s}\ {}_{k+s} p_x\ \mu_{x+k+s}\ ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_x \int_0^{1} v^{s-1}\ {}_s p_{x+k}\ \mu_{x+k+s}\ ds.\end{aligned} \tag{29}$$

La integral de la expresión (29) puede expresarse con funciones discretas de tablas de mortalidad, adoptando el supuesto acerca de la forma de la función de mortalidad entre las edades (x) y (x+1), q_x permanece constante dentro del intervalo de un año, es decir, bajo el supuesto de una distribución uniforme de los fallecimientos sobre el año de edad (x), se tiene:

$${}_s p_{x+k}\ \mu_{x+k+s} = q_{x+k} \qquad 0 \le s \le 1$$

que aplicado en la expresión (29) se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_x\ q_{x+k} \int_0^{1} (1+i)^{1-s}\, ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\ {}_k p_x\ q_{x+k}\ \bar{s}_{\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} A_x\end{aligned} \tag{30}$$

Por lo anterior, basta multiplicar el factor $\left(\dfrac{i}{\delta}\right)$ al seguro de tipo discreto, para aproximarlo al caso continuo, este mismo racionamiento aplica para los seguros de tipo variable con suma asegura constante por periodo anual y de tipo continuo.

En el desarrollo anterior, se analizaron los ***pagos dependientes del fallecimiento***, es decir los que proporcionan diversas formas de seguros de vida. A continuación revisaremos los pagos dependientes de la ***sobrevivencia***, a los cuales se le conoce como ***anualidad contingente***, en forma general, es el que otorga una serie de pagos hechos en forma continua o a intervalos iguales (como meses, trimestres, años) mientras un individuo de edad (x) se encuentra con vida en el tiempo, a lo que se le conoce como ***anualidad vitalicia***, también pueden ser temporal, es decir, limitada a un plazo de n-años. Los intervalos de pago pueden comenzar inmediatamente o, alternativamente, la anualidad puede diferirse. Los pagos pueden cobrarse al principio de los intervalos de pago (anualidades anticipadas) o al final de los mismos (anualidades de pago al final del periodo).

A través del estudio de las *anualidades ciertas* en la teoría del interés, se tiene un conocimiento previo de la terminología de la notación.

Consideremos el caso de que una unidad monetaria es particionada en m-ésimos y cada m-ésimos coincide con cada m-ésimos de tiempo, durante los próximos n-años, el valor presente de ese conjunto de pagos en forma vitalicia de un monto de una unidad monetaria al año, cuando $m \to \infty$, implica que los pagos son de tipo continuo, mientras (x) sobrevive al plazo establecido, lo cual denotaremos como $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ o en otras palabras el conjunto de pagos está asociado a la función de probabilidad en el tiempo más el total de pagos si sobrevive al final de n-años, a semejanza de la expresión (2).

Con T representando el tiempo futuro de vida de (x), el valor presente de los pagos realizado hasta el fallecimiento de $\Upsilon = \bar{a}_{\overline{T}|}$, con la *f.d.p.* de T es ${}_t p_x \ \mu_{x+t}$, y por la técnica de pago agregado nos conduce a definir el valor presente actuarial de la anualidad como

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E\left[\Upsilon\right] \\ &= \int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_t p_x \ \mu_{x+t} \ dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_t p_x \end{aligned} \qquad (31)$$

Donde

$$\Upsilon = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & ; \ T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & ; \ T \geq n \end{cases}$$

Integrando por partes y usando el artificio ${}_t p_x \ \mu_{x+t} \ dt = -d \, {}_t p_x$, ya visto en la determinación [d] de L_x, se obtiene:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \ {}_t p_x \ dt \qquad (32)$$

[d] $L_x = \int_0^1 t \ l_{x+t}\mu_{x+t}dt + l_{x+1} = -\int_0^1 t \ dl_{x+t} + l_{x+1}$, es decir $l_{x+t} \ \mu_{x+t}dt = -d \ l_{x+t}$, al afectarlo por $(1/l_x)$, se tiene ${}_t p_x \ \mu_{x+t} \ dt = -d \, {}_t p_x$

Observemos su analogía con la fórmula de interés compuesto de la anualidad cierta de tipo continuo.

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, dt \qquad (33)$$

Ahora bien, si estos pagos se realizan de por vida, entonces supondremos que $n \to \infty$, lo anterior, da origen a una *anualidad vitalicia*, donde el conjunto de pagos estará condicionado siempre a la sobrevivencia del individuo de edad (x) en el tiempo, para este caso se tendrá:

De la expresión (31)

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{x:\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, dt + \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_t p_x\right] \\ &= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} \cdot {}_t p_x \, \mu_{x+t} \, dt + \cancel{\bar{a}_{\overline{\infty}|} \; {}_\infty p_x}^{\,0}\end{aligned} \qquad (34)$$

De la expresión (32) y del desarrollo de la expresión (34), se tiene

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \; {}_t p_x \, dt$$

$$\bar{a}_x = \int_0^n v^t \; {}_t p_x \, dt$$

En donde la expresión (34) también se puede obtener de la expresión (32), cuando $n \to \infty$.

Pueden obtenerse las relaciones entre $\bar{a}_x$ y $\bar{A}_x$ expresando

$$\Upsilon = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1-v^T}{\delta} = \frac{1-Z}{\delta} \qquad (35)$$

en donde $Z = v^T$ es la variable aleatoria del valor presente para un seguro de vida entera con $T \geq 0$, obtenemos

$$\bar{a}_x = E[\Upsilon] = E\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \qquad (36)$$

Un desarrollo muy semejante se puede realizar para $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ y $\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$, considerando en la expresión (35)

$$Z = \begin{cases} v^T & ; \; T < n \\ v^n & ; \; t \geq n \end{cases}$$

Continuando con el modelo de la *anualidad vitalicia continua,* estaremos interesados en determinar la $Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$. Así

$$\begin{aligned} Var\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right] &= Var\left[\frac{1-v^T}{\delta}\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2} Var\left[v^T\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2\right] \end{aligned} \tag{37}$$

en donde, el segundo momento ${}^2\bar{A}_x$ se calcula con base en la fuerza de interés 2δ, desarrollada en el caso de la expresión (7), cuando $n \to \infty$.

Se puede observar, conforme a la equivalencia definida en la *teoría del interés compuesto* si,

$$\delta \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T = 1 \tag{38}$$

Prevalece la equivalencia, al considerar la esperanza en la expresión (38) y además esta equivalencia ya fue obtenida en la expresión (36).

$$E\left[\delta \bar{a}_{\overline{T}|} + v^T\right] = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x = 1 \tag{39}$$

En la **tabla 3**, se presenta un resumen de las principales anualidades continuas, con base a la condición de la variable aleatoria Υ:

TABLA 3

Nombre de la Anualidad	**Variable aleatoria del Valor Presente** Υ	**Valor presente actuarial igual a** $E[\Upsilon]$
Anualidad vitalicia	$\bar{a}_{\overline{T}|} \quad ; \quad T \geq 0$	$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t \; {}_t p_x \, dt$
Anualidad temporal a n años	$\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} \; ; & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} \; ; & T \geq n \end{cases}$	$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^{n} v^t \; {}_t p_x \, dt$
Anualidad vitalicia diferida a n años	$\begin{cases} 0 \; ; & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} \; ; & T \geq n \end{cases}$	${}_{n\|}\bar{a}_x = \int_n^{\infty} v^t \; {}_t p_x \, dt$
Anualidad vitalicia con periodo de garantía de n años	$\begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|} \; ; & 0 \leq T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|} \; ; & T \geq n \end{cases}$	$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^{\infty} v^t \; {}_t p_x \, dt$
Anualidad temporal a n años, diferida m años	$\begin{cases} 0 \; ; & 0 \leq T < m \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} \; ; & m \leq T < m+n \\ \bar{a}_{\overline{m+n}|} - \bar{a}_{\overline{m}|} \; ; & T \geq m+n \end{cases}$	${}_{m\|n}\bar{a}_x = {}_{m\|}\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_m^{m+n} v^t \; {}_t p_x \, dt$
Las relaciones adicionales son: (a) $1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$ (b) $1 = \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$ (c) ${}_{n\|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|}$ (d) $\bar{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \int_0^n (1+i)^{n-t} \frac{l_{x+t}}{l_{x+n}} dt.$		

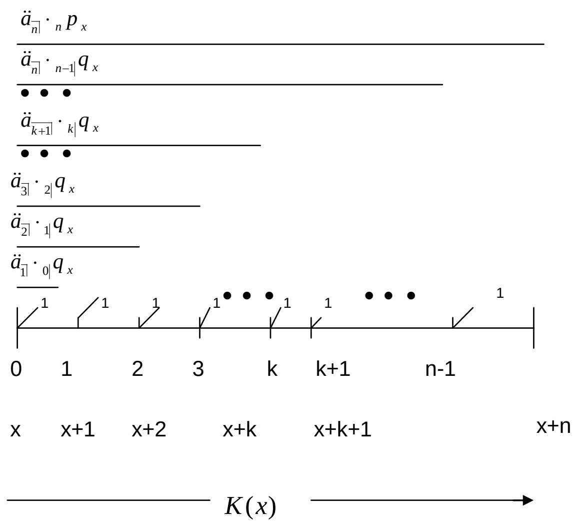
Con objeto de entender la esencia de los pagos realizados en el tiempo, asociados a la probabilidad de sobrevivencia, consideremos el **caso discreto**, donde el conjunto de pagos $\ddot{a}_{\overline{k+1}|}$ está asociado a que sobreviva a k años y de que fallezca dentro del año siguiente; esta probabilidad corresponde a la función de probabilidad $g_{K(x)}(k) = {}_{k|}q_x = {}_kp_x \; q_{x+k}$, así el valor esperado del conjunto de pagos a n-años de tipo contingentes, es llamada ***anualidad anticipada temporal a n-años***.

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[\Upsilon] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \; g_{K(x)}(k) + \ddot{a}_{\overline{n}|} \; {}_np_x \tag{40}$$

Donde

$$\Upsilon = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & ; \; K = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} & ; \; K = n, n+1, \ldots \end{cases} \tag{41}$$

El pago agregado $\ddot{a}_{\overline{n}|} \; {}_np_x$, tiene su esencia del razonamiento de la expresión (2), en donde en este caso se cubre la última probabilidad de sobrevivencia a n-años y los pagos respectivos; se puede apreciar su comportamiento en la gráfica siguiente.



Gráfica 1

Un razonamiento semejante, se puede desarrollar para el caso de ***anualidad vencida temporal a n-años*** $\left(a_{x:\overline{n}|}\right)$.

Ahora bien, si estos pagos se realizan de por vida, entonces supondremos que $k \to \infty$, lo anterior da origen a una ***anualidad vitalicia***, donde el conjunto de pagos estará condicionado siempre a la sobrevivencia del individuo de edad (x) en el tiempo, para este caso se tendrá:

De la expresión (40).

$$\ddot{a}_x = \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \; {}_{k|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|} \; {}_np_x\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \; {}_{k|}q_x + \cancel{\ddot{a}_{\overline{\infty}|} \; {}_{\infty}p_x}^{\;0} \tag{42}$$

Del desarrollo de las expresiones (40) y (42), considerando $\ddot{a}_{\overline{k+1}|} = 1 + v^1 + v^2 + ... + v^k$ y ${}_{k|}q_x = {}_k p_x - {}_{k+1} p_x$, se tiene

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \ {}_k p_x \tag{43}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \ {}_k p_x \tag{44}$$

En donde la expresión (44) también se puede obtener de la expresión (43), cuando $k \to \infty$.

La expresión (40), $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[\Upsilon]$, Υ se puede reformular, considerando la teoría del interés compuesto, como:

$$\Upsilon = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \dfrac{1-v^{K+1}}{d} & ; K = 0,1,2,...,n-1 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{d} & ; \ K = n, n+1,... \end{cases} \tag{45}$$

A su vez.

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & ; \quad 0 \le K = 0,1,2,...,n-1 \\ v^n & ; \ K = n, n+1,... \end{cases} \tag{46}$$

es la variable aleatoria del valor presente para una unidad de seguro dotal, pagadera al final del año del fallecimiento, o a la conclusión del periodo por sobrevivencia, tenemos

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left(1 - E[Z]\right) = \frac{1}{d}\left(1 - A_{x:\overline{n}|}\right) \tag{47}$$

reordenando, se obtiene

$$d \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} = 1 \tag{48}$$

Relación semejante al caso continuo; para calcular la varianza, podemos utilizar la expresión (45), para obtener.

$$Var[\Upsilon] = \frac{1}{d^2} Var[Z] = \frac{1}{d^2}\left[{}^2A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|}{}^2 \right] \tag{49}$$

Donde el ${}^2A_{x:\overline{n}|}$ y $A_{x:\overline{n}|}$ son expresiones desarrollado en los puntos (18) a la (22).

Tanto en el caso de anualidades continuas como discretas, se pueden llegar a expresiones donde se involucre algún comportamiento en la forma de otorgar la renta por periodos definidos, por ejemplo: $\left(I \ \bar{a}\right)_x, \left(I \ \ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|}, \left(I_{\overline{m}|} \ \ddot{a}\right)_x, ...$

A continuación, se presenta en la tabla 4 un resumen de las principales anualidades discretas, con base a la condición de la variable aleatoria Υ :

TABLA 4

Nombre de la Anualidad	**Valor presente de la variable Υ**		**Valor presente Actuarial $E[\Upsilon]$ igual a**
Anualidad vida entera (vitalicia)			
Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$	$K = 0,1,2,...$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_k p_x$
Vencida	$a_{\overline{K}\rceil}$	$K = 0,1,2,...$	$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k\ {}_k p_x$
Anualidad temporal n años			
Anticipada	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil}$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$K = 0,1,2,...,n-1$ $K = n, n+1,...$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x$
Vencida	$a_{\overline{K}\rceil}$ $a_{\overline{n}\rceil}$	$K = 0,1,2,...,n-1$ $K = n, n+1,...$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{k=1}^{n} v^k\ {}_k p_x$
Anualidad vida entera (vitalicia) diferida n años			
Anticipada	0 $\ddot{a}_{\overline{K+1}\rceil} - \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$K = 0,1,2,...,n-1$ $K = n, n+1,...$	${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k\ {}_k p_x$
Vencida	0 $a_{\overline{K}\rceil} - a_{\overline{n}\rceil}$	$K = 0,1,2,...,n-1$ $K = n, n+1,...$	${}_{n\vert}a_x = \sum_{k=n+1}^{\infty} v^k\ {}_k p_x$
Las relaciones adicionales son			

$$d\ \ddot{a}_x + A_x = 1$$

$$A_x = v\ \ddot{a}_x - a_x$$

$$d\ \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} + A_{x:\overline{n}\rceil} = 1$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = 1 + a_{x:\overline{n-1}\rceil}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}\rceil} = v\ \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - a_{x:\overline{n}\rceil}$$

$$A_{x:\overline{n}\rceil} = v\ \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} - a_{x:\overline{n-1}\rceil}$$

$${}_{n\vert}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}$$

$$\ddot{S}_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}{{}_nE_x} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{n-k}\, \frac{l_{x+k}}{l_{x+n}}.$$

En la práctica, las anualidades contingentes a menudo son pagadas en una base mensual, trimestral o semestral. Al igual que para la notación anual, el valor actuarial presente de una anualidad contingente de una unidad monetaria por año, que es fracciona en $\left(1/m\right)$ de la unidad monetaria y es pagada a plazos de $\left(1/m\right)$ de tiempo (base anual) al principio de cada $\left(1/m\right)$ periodo mientras $\left(x\right)$ sobreviva, se denota como $\ddot{a}_x^{(m)}$.

Para tal efecto, debemos analizar la distribución de Υ, valor presente de la anualidad anticipada, con pagos de $\left(\frac{1}{m}\right)$ de unidad monetaria, efectuados a cada m-ésimo de tiempo es decir, $\left[\frac{1}{m}\right]$ de año, pero expresando la variable aleatoria Υ en términos de la tasa de interés y las variables aleatorias K y $J = \left\lfloor \left(T-K\right)m \right\rfloor$, donde "$\lfloor\quad\rfloor$" representa la parte entera del desarrollo mostrado.

Para una anualidad anticipada de pagos de $\left[\frac{1}{m}\right]$ de unidad monetaria realizados a cada m-ésimo de tiempo, es decir a cada $\left[\frac{1}{m}\right]$ de año, se tiene:

$$\Upsilon = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+(J+1)/m|}} = \frac{1-v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}} \tag{50}$$

el valor esperado de la variable aleatoria Υ cuando $K \to \infty$, es

$$E\left[\Upsilon\right] = \ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}} \tag{51}$$

Por el procedimiento de pago corriente, el valor presente de este conjunto de pagos es:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m}\ {}_{h/m}p_x \tag{52}$$

De igual forma podríamos obtener la varianza de Υ, por lo que

$$Var\left(\Upsilon\right) = \frac{Var\left(v^{K+(J+1)/m}\right)}{\left(d^{(m)}\right)^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - \left(A_x^{(m)}\right)^2}{\left(d^{(m)}\right)^2} \tag{53}$$

Partiendo de la expresión (52), podemos obtener varias relaciones entre el valor presente actuarial para *m*-ésimos de pagos anuales con pagos anuales.

$$1 = d\ \ddot{a}_x + A_x = d^{(m)}\ \ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)} \tag{54}$$

Esto se sigue del hecho de que una inversión de una unidad monetaria produce interés a partir del inicio de cada periodo y pagos de la unidad al final de cada periodo, en el cual la ocurre muerte.

La expresión (52), $\ddot{a}_x^{(m)}$, puede ser simplificada aplicando la fórmula de sumatoria de Woolhouse {3}, al término $\frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m}\ {}_{h/m}p_x$, es decir suponiendo que la función $v^{k+(j/m)}\ {}_{k+(j/m)}p_x$ es lineal en j, para $j = 0,1,2,...,m-1$, es este caso,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+(j/m)}\ {}_{k+(j/m)}p_x &= \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}\left[\left(1-\frac{j}{m}\right)v^k\ {}_kp_x + \frac{j}{m}v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x\right] \\ &= v^k\ {}_kp_x - \left(v^k\ {}_kp_x - v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x\right)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m^2} \\ &= v^k\ {}_kp_x - \frac{m-1}{2m}\left(v^k\ {}_kp_x - v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x\right)\end{aligned} \tag{55}$$

Así

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m}v^{k+(j/m)}\ {}_{k+(j/m)}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}v^k\ {}_kp_x - \frac{m-1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(v^k\ {}_kp_x - v^{k+1}\ {}_{k+1}p_x\right) \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned} \tag{56}$$

Un desarrollo semejante se puede aplicar para anualidades de tipo fraccionado como:

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}$, ${}_{l\,|\,n}\ddot{a}_x^{(m)}$, etcétera.

Una vez determinadas las primas únicas para ***seguros*** y ***anualidades*** podemos pasar a la construcción de ***primas niveladas***. Para este fin, utilizaremos el principio de equivalencia, de tal manera que la prima nivelada quedará definida por la condición, de que la obligación que asume la compañía es equivalente a la obligación que asume el asegurado.

Hasta el momento se han construido modelos [e] en donde la tasa de interés involucrada es constante en el tiempo y sólo es considerado el efecto de la mortalidad en el tiempo en forma determinística.

(e) Tales modelos se han desarrollan en los textos de cálculo actuarial, tales como King (1902), Spurgeon (1932), Hooker y Longley-Cook (1957), Jordan (1967), Gerber (1986), Clarke (1994) y Bowers (1997), en estos tres últimos, bajo el enfoque probabilístico de la mortalidad.

En forma general, el principio clásico, involucra en la determinación de la ***prima nivelada*** la existencia del individuo objeto de estudio, el cual se asocia al pago de la prima respectiva y por otra parte debe existir la equivalencia en relación a la obligación que asume el ente asegurador en caso de fallecimiento, es decir, uno compromete su pago de primas mientras se encuentra con vida y el otro asume el riesgo por esas primas recibidas en el tiempo.

Con objeto de mostrar la esencia de esta equivalencia consideremos el caso de la prima neta anual uniforme totalmente continua para una unidad monetaria de seguro de vida entera que se paga al instante de la muerte de (*x*) y consideremos el siguiente principio.

$$\begin{Bmatrix} \text{Obligación} \\ \text{de la Compañía} \\ \text{a edad } (x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Obligación} \\ \text{del Asegurado} \\ \text{a edad } (x) \end{Bmatrix} \tag{57}$$

Ahora denotemos como $\bar{P}$ a la prima pagada continuamente, la cual corresponde a la obligación del asegurado en el tiempo, estos pagos dependerán de la existencia de (*x*), los cuales vistos a fecha actual, la obligación del asegurado es $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\cdot\ \bar{a}_x$, observemos que $\bar{P}$ se le agrega entre paréntesis el término del tipo de seguro, esto es con objeto de hacer la precisión respectiva y por otra parte la obligación que asume la aseguradora por estos pagos a la fecha de valuación $\bar{A}_x$, por el principio de equivalencia a edad (*x*), para l expresión (57), se tiene.

$$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\cdot\bar{a}_x = \bar{A}_x \tag{58}$$

donde la prima nivelada es

$$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{59}$$

de la expresión (58), se tiene

$$\bar{A}_x - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\cdot\bar{a}_x = 0 \tag{60}$$

Por otro lado, usando el principio de equivalencia y construyendo la variable aleatoria asociada a estas obligaciones; y siguiendo el caso anterior, donde la prima nivelada es totalmente continua para una unidad monetaria de seguro de vida entera que se paga inmediatamente a la muerte de (*x*). Para cualquier $\bar{P}$ (prima pagada continuamente), definimos

$$l(t) = v^t - \bar{P}\ \bar{a}_{\overline{t|}} \tag{61}$$

Como el valor presente de la pérdida del asegurador, si la muerte ocurre en el tiempo *t*, y propongamos ahora la variable aleatoria de pérdida,

$$L = l(T) = v^T - \bar{P}\ \bar{a}_{\overline{T|}} \tag{62}$$

correspondiente a la función de pérdida $l(t)$.

Si el asegurador determina su prima mediante el principio de equivalencia, la prima se representa por $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ y es tal que

$$E\left[L\right]=0 \tag{63}$$

De las expresiones (8) y (34) se sigue que

$$\bar{A}_x-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x=0 \tag{64}$$

o

$$\bar{P}(\bar{A}_x)=\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} \tag{65}$$

Equivalente a la expresión (59), vista en forma clásica.

La varianza de *L* puede utilizarse como una medida de la variabilidad de las pérdidas en un seguro, debido a la naturaleza aleatoria del tiempo transcurrido hasta que se sobreviene la muerte y como $E\left[L\right]=0$, entonces

$$Var\left[L\right]=E\left[L^2\right] \tag{66}$$

Para la pérdida de L, expresión (62), tenemos

$$\begin{aligned}
Var\left[v^T-\bar{P}\bar{a}_{\overline{T|}}\right]&=Var\left[v^T-\frac{\bar{P}\left(1-v^T\right)}{\delta}\right]\\
&=Var\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)-\frac{\bar{P}}{\delta}\right]\\
&=Var\left[v^T\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)\right]\\
&=Var\left[v^T\right]\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2\\
&=\left({}^2\bar{A}_x-\bar{A}^2{}_x\right)\left(1+\frac{\bar{P}}{\delta}\right)^2
\end{aligned} \tag{67}$$

.

Para la prima determinada mediante el principio de equivalencia, podemos utilizar la expresión (66) y la equivalencia $\delta\bar{a}_x+\bar{A}_x=1$, para rescribir la expresión (67) como

$$Var\left[L\right]=\frac{{}^2\bar{A}_x-\bar{A}_x^{\,2}}{(\delta\,\bar{a}_x)^2} \tag{68}$$

Cuando el pago de primas es limitado o menor al periodo de cobertura del seguro de vida, se indicará tal situación con un subíndice en lado izquierdo inferior de la prima nivelada, en notación general. ${}_h\bar{P}$, en la tabla 5, se muestra un resumen de las principales primas niveladas, indicándose en cada caso la componente de la pérdida y la prima correspondiente.

TABLA 5

Primas niveladas totalmente continuas			
	Componentes de la pérdida		**Fórmula de la prima**
Tipo de plan	$b_T v_T$	$\bar{P}\Upsilon$ Donde Υ es	$\bar{P} = \frac{E[b_T v_T]}{E[\Upsilon]}$
Seguro de vida entera	$1v^t$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil}$	$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
Seguro a plazo de *n* años	$1v^t$ **0**	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil},\ T > n$	$\bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}\right) = \frac{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro dotal a *n* años	$1v^t$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil},\ T > n$	$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Seguro* de vida entera a *h* pagos	$1v^t$ $1v^t$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil},\ T > h$	${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Seguro* dotal a *n* años con *h* pagos $h \le n$	$1v^t$ $1v^t$ $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le h$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil},\ h < T \le n$ $\bar{a}_{\overline{h}\rceil},\ T > n$	${}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
Seguro dotal puro a *n* años	**0** $1v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil},\ T > n$	$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$
Anualidad vitalicia diferida a n años	**0** $\bar{a}_{\overline{T-n}\rceil} v^n$	$\bar{a}_{\overline{T}\rceil},\ T \le n$ $\bar{a}_{\overline{n}\rceil},\ T > n$	$\bar{P}\left({}_{n\vert}\bar{a}_x\right) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}^{\;\;1}\, a_{x+n}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$

Continuando con este estudio, consideraremos seguros de primas anuales, es decir, la suma asegurada es pagadera al final del año de la póliza en el que ocurre el fallecimiento y la primera prima se paga a partir de la expedición del seguro.

Las primas subsiguientes, son pagaderas mientras sobreviva el asegurado en los aniversarios de la expedición de la póliza, durante el periodo de pago contractual de la prima.

A efecto de dar continuidad sobre el análisis del seguro de tipo entero o de por vida, consideremos primas que se pagan en forma anual y que la indemnización en caso de fallecimiento dentro del año póliza, se efectúa al final del año de aniversario de la prima pagada.

Este modelo no se adapta a la práctica, ya que la suma asegurada se paga una vez dadas la(s) prueba(s) del siniestro reclamado y por consiguiente se puede pensar que es de tipo continuo, pero es de importancia histórica en el desarrollo de la teoría actuarial.

Bajo estas circunstancias, la prima neta anual uniforme nivelada para una unidad monetaria de un seguro de vida entero, denotado por P_x, en donde la ausencia de $(\bar{A}_x)$ significa que el seguro es pagadero al final del año de la póliza en que sucede el fallecimiento. La pérdida para este seguro es

$$L = v^{k+1} - P_x \ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \qquad k = 0,1,2,... \tag{69}$$

El principio de equivalencia exige que $E\left[L\right] = 0$ ó

$$E\left[v^{k+1}\right] - P_x E\left[\ddot{a}_{\overline{k+1|}}\right] = 0$$

obteniéndose

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} \tag{70}$$

Éste es el análogo discreto de la expresión (65).

Usando la equivalencia $d\ \ddot{a}_x + A_x = 1$, con pasos semejantes a los dados para obtener la expresión (67), se llega a

$$Var\left[L\right] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{(d\ \ddot{a}_x)^2} \tag{71}$$

Cuando el pago de primas es limitado o menor al periodo de cobertura del seguro de vida, se indicará tal situación con un subíndice en lado izquierdo inferior de la prima nivelada ${}_hP$, en la tabla 6, se presenta un resumen de las principales primas niveladas, mostrando en cada caso la componente de la pérdida y la prima correspondiente.

TABLA 6

Primas anuales netas totalmente discretas			
	Componentes de la Pérdida		**Fórmula de la prima**
Tipo de plan	$b_{K+1}v_{K+1}$	$P\Upsilon$ Donde Υ es	$P=\dfrac{E[b_{K+1}v_{K+1}]}{E[\Upsilon]}$
Seguro de vida entera	$1\ v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,2,\ldots$	$P_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$
Seguro a plazo de *n* años (Temporal *n*-años)	$1\ v^{K+1}$ **0**	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\quad K=n,n+1,\ldots$	$P^{1}_{x:\overline{n}\rvert}=\dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Seguro dotal a *n* años	$1\ v^{K+1}$ $1\ v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\quad K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overline{n}\rvert}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Seguro de vida entera a *h* pagos	$1\ v^{K+1}$ $1\ v^{K+1}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\quad K=h,h+1,\ldots$	${}_hP_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
Seguro dotal a *n* años con *h* pagos $h\le n$	$1\ v^{K+1}$ $1\ v^{K+1}$ $1\ v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,h-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\quad K=h,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{h}\rvert}\ ,\quad K=n,n+1,\ldots$	${}_hP_{x:\overline{n}\rvert}=\dfrac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rvert}}$
Seguro dotal puro a *n* años	**0** $1\ v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\quad K=n,n+1,\ldots$	$P_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}=\dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$
Anualidad vitalicia diferida a n años	**0** $\ddot{a}_{\overline{K+1-n}\rvert}\ v^{n}$	$\ddot{a}_{\overline{K+1}\rvert}\ ,\quad K=0,1,\ldots,n-1$ $\ddot{a}_{\overline{n}\rvert}\ ,\quad K=n,n+1,\ldots$	$P\left({}_{n}\rvert\ddot{a}_x\right)=\dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}}\ \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}$

Se pueden presentar casos especiales, ya que en la práctica, los seguros de vida son pagados inmediatamente después del fallecimiento en lugar de al final del año en que ocurre éste, por lo tanto es necesario el pago anual de ***primas netas semicontinuas***.

Dichas primas, siguiendo el mismo orden utilizado en los cuadros anteriores, se denotarán como $P(\overline{A}_x)$, $P(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert})$, $P(\overline{A}_{x:\overline{n}\rvert})$ ${}_hP(\overline{A}_x)$ y ${}_hP(\overline{A}_{x:\overline{n}\rvert})$, incluso primas pagadas en forma fraccionada en el año y en forma limitada al periodo del seguro. Un ejemplo de lo anterior, sería el caso de un seguro dotal a *n*-años, con pago de primas fraccionadas y limitadas a *h*-años, *h* < *n*, donde la prima nivelada anual sería:

$$ {}_hP^{(m)}{}_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{A_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{h}\rvert}} \tag{72}$$

En el concepto de ***prima neta nivelada***, se introdujo el principio de equivalencia, la relación de equivalencia se establece en el momento en que se inicia un contrato entre dos partes que acceden a intercambiar un conjunto de pagos, por ejemplo.

1. En un préstamo amortizable el prestatario puede pagar una serie de pagos mensuales iguales equivalentes a un pago único al prestamista a la fecha del préstamo.

2. Un asegurado puede pagar una serie de primas netas a un asegurador equivalente, en la fecha de la expedición de la póliza, a la suma asegurada sobre la muerte del asegurado, o a la sobrevivencia del mismo a la fecha de vencimiento.

3. Un individuo puede adquirir una anualidad vitalicia diferida por medio de primas iguales pagaderas a una organización equivalente, en la fecha del contrato de consentimiento, a pagos mensuales de la organización al individuo cuando esa persona sobrevive más allá de una fecha especificada.

La equivalencia en el ejemplo del préstamo está en términos de valor presente mientras que en los del seguro y la anualidad es una equivalencia entre dos valores presentes actuariales.

Sin embargo, después de un periodo ya no habrá equivalencia entre las dos obligaciones financieras futuras de las partes. El que pide prestado puede tener que seguir haciendo pagos mientras que el prestamista ya cumplió con sus responsabilidades. En otros casos, ambas partes pueden todavía tener obligaciones. Al asegurado puede requerírsele que pague primas netas adicionales mientras que el asegurador tiene el deber de pagar la cantidad nominal al vencimiento o muerte del asegurado. En el ejemplo sobre la anualidad diferida, el individuo puede haber completado sus pagos mientras que la organización todavía tiene que hacer remuneraciones mensuales.

Bajo estas ideas, el aplicar el principio de equivalencia a pagos de periodos *más allá de la fecha de iniciación*, requiere un elemento de balance, éste será una obligación o deuda para una de las partes y un activo para la otra.

En el caso del préstamo, el elemento de balance es la deuda principal, un activo para el prestamista y una obligación para el prestatario.

En los otros dos ejemplos, *el elemento de balance se denomina* ***reservas de primas netas***. Esta es una obligación que deber reconocerse en cualquier estado financiero de un asegurador u organización de anualidades, cualquiera que sea el caso. También es un activo para el asegurado o individuo que adquiera una anualidad.

Una forma sencilla de entender este desequilibrio técnico formado entre la prima pagada y la obligación en el tiempo, se tiene con el siguiente ejemplo.

Si consideramos un seguro de vida entera emitido a edad (x), denotado como A_x; y el pago de las primas como P_x que denota pagos anuales y de por vida, su valor presente a la edad (x) de esta obligación es $P_x \cdot \ddot{a}_x$; donde $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$, bajo el principio de equivalencia:

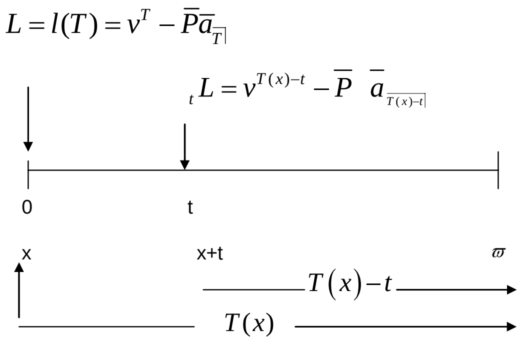
$A_x = P_x \cdot \ddot{a}_x$; en el año de expedición de la póliza edad (x), al año siguiente el individuo habrá envejecido un año, es decir, ha alcanzado la edad (x+1) y vista la obligación de pagar la prima P_x a la edad (x+1) a valor presente, bajo el principio de equivalencia, se produce la siguiente desigualdad en la ¿ecuación de equivalencia?

$$A_{x+1} \neq P_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$$

Considerando la función definida en la expresión (61); $l(t) = v^t - \overline{P}\ \overline{a}_{\overline{t|}}$, del caso continuo, que es el valor presente de la pérdida del asegurador si la muerte ocurre en el tiempo t, vista bajo el principio de equivalencia a edad (x) y su variable pérdida aleatoria a esa edad, tiempo $t = 0$, $L = l(T) = v^T - \overline{P}\overline{a}_{\overline{T|}}$ (expresión 62), modificándose para cualquier $t > 0$, es decir, para el tiempo restante $T(x) - t$, se tiene

$$_tL = v^{T(x)-t} - \overline{P}\ \ \overline{a}_{\overline{T(x)-t|}} \qquad (73)$$

Gráficamente, se muestra este proceso.



La ***reserva***, es la esperanza condicional, determinada sobre la distribución del tiempo futuro para t para una vida de edad selectiva (x), es decir, $_t\overline{V}\left(\overline{A}_{[x]}\right) = E\left[{}_tL / T(X) > t\right]$.

Si esta la única información que se tiene entonces $T(x)-t$ es igual a $T(x+t)$, su expresión final es:

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) = \bar{A}_{x+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\ \bar{a}_{x+t} $$

El mismo efecto se tiene si introducimos la variable aleatoria *U*, que denota el tiempo transcurrido hasta que se sobreviene la muerte de (*x*+*t*), con la función de probabilidad (*f.p.*) dada por

$$ {}_uP_{x+t}\mu_{x+t+u} \qquad u \geq 0 $$

Ahora expresemos la *pérdida prospectiva* en el tiempo *t* como

$$ {}_tL = v^U - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{U}|} \tag{74} $$

y la reserva de la prima neta, como la esperanza de la *pérdida prospectiva*. Por lo tanto tenemos

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= E\left[{}_tL\right] = E\left[v^U\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{U}|}\right] \\ &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{x+t}|} \end{aligned} \tag{75} $$

Esta expresión, establece que la reserva es igual al:

Valor presente actuarial para el seguro de vida entera desde la edad (*x* + *t*) menos
el valor presente actuarial de las primas netas futuras por pagar a partir de la edad (*x* + *t*), a una tasa anual de $\bar{P}(\bar{A}_x)$.

Las expresiones $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ y ${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$ están relacionadas. Cuando *t* = 0, por lo tanto al aplicarlo en la expresión (75), se obtiene ${}_0\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) = 0$. Esto es una consecuencia del principio de equivalencia para el tiempo en el que se determinan las primas netas.

Mediante pasos similares a los utilizados para obtener la expresión (67), determinamos

$$ {}_tL = v^U\left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right] - \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta} \tag{76} $$

por lo tanto

$$ \begin{aligned} Var\left[{}_tL\right] &= \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right]^2 Var\left[v^U\right] \\ &= \left[1 + \frac{\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)}{\delta}\right]^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_{x+t}^2\right) \end{aligned} \tag{77} $$

Mediante un proceso semejante, se pueden obtener diversos casos de reservas con primas totalmente continuas a edad (x) como inicio de la expedición del seguro, con duración t y suma asegurada de una unidad; y de igual forma su varianza bajo el proceso mostrado en la expresión (77).

En la siguiente tabla, se muestra un resumen para diferentes tipos de seguro.

TABLA 7

Plan	Notación	Fórmula prospectiva
Seguro de vida entera	${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$	$\bar{A}_{x+t} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t}$
Seguro temporal a n años	${}_t\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\begin{cases} \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} & t < n \\ 0 & t = n \end{cases}$
Seguro dotal a n años	${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} & t < n \\ 1 & t = n \end{cases}$
Seguro de vida entera con h años de pago	${}^{h}_{t}\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t} - {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rvert} & t \le h \\ \bar{A}_{x+t} & t > h \end{cases}$
Seguro dotal a n años con h años de pago	${}^{h}_{t}\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} - {}_h\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{h-t}\rvert} & t \le h < n \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} & h < t < n \\ 1 & t = n \end{cases}$
Seguro dotal puro a n años	${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}\right)$	$\begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}^{\;\;1} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} & t < n \\ 1 & t = n \end{cases}$
Anualidad vida entera (vitalicia) diferida n años	${}_t\bar{V}\left({}_{n\rvert}\bar{a}_x\right)$	$\begin{cases} {}_{n-t\rvert}\bar{a}_{x+t} - \bar{P}\left({}_{n\rvert}\bar{a}_x\right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert} & t \le n \\ \bar{a}_{x+t} & t > n \end{cases}$

En forma semejante, consideremos el caso del pago de primas anuales y con pago de indemnización al final del año del fallecimiento. Para este desarrollo continuaremos considerando el seguro de vida entera que paga una unidad monetaria de suma asegurada en caso de fallecimiento, con prima neta anual P_x. La reserva al final de k años se denota por ${}_kV_x$. Siguiendo un desarrollo semejante al caso continuo, definamos la variable aleatoria J como el ***tiempo futuro de vida truncado*** de ($x + k$) con *f.p.* ${}_jp_{x+k}q_{x+k+j}$; $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Su función de pérdida prospectiva bajo estas condiciones, quedará definida como

$$ {}_kL = v^{J+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{J+1}\rvert} \tag{78}$$

y de la definición de que ${}_kV_x = E\left[{}_kL\right]$, se obtiene

$$ {}_kV_x = A_{x+k} - P_x\ddot{a}_{x+k} \tag{79}$$

Esta expresión ${}_kV_x$ es el valor presente actuarial del seguro de vida entera desde la edad $\left(x+t\right)$ menos el valor presente actuarial de las primas netas futuras P_x.

En forma análoga a la expresión (77), tenemos

$$\begin{aligned} Var\left[{}_kL\right] &= Var\left[v^{J+1}\left(1+\frac{P_x}{d}\right)\right] \\ &= \left[1+\frac{P_x}{d}\right]^2 Var\left[v^{J+1}\right] \quad \forall \quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{80}$$

Mediante un proceso semejante, se pueden obtener diversos casos de ***reservas totalmente discretas***, como se muestra en la tabla 8, con primas niveladas anuales a edad de expedición (*x*); temporalidad *t*-años y suma asegurada de una unidad; y de igual forma su varianza bajo procesos similares a los antes vistos en el caso continuo.

TABLA 8

Plan	Notación Actuarial Internacional	Fórmula Prospectiva
Seguro de vida entera	${}_kV_x$	$A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$
Seguro temporal a n años	${}_kV^1_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A^{\ 1}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P^1_{x:\overline{n}\rvert}\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 0 & k=n \end{cases}$
Seguro dotal a n años	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - P_{x:\overline{n}\rvert} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Seguro de vida entera con h años de pago	${}^h_kV_x$	$\begin{cases} A_{x+k} - {}_hP_x \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert} & k<h \\ A_{x+k} & k \geq h \end{cases}$
Seguro dotal a *n* años con h años de pago	${}^h_kV_{x:\overline{n}\rvert}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} - {}_hP_{x:\overline{n}\rvert} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{h-k}\rvert} & k<h<n \\ A_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & h \leq k < n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Seguro dotal puro a *n* años	${}_kV_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1}$	$\begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}\rvert}^{\ \ \ 1} - P_{x:\overline{n}\rvert}^{\ \ 1} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ 1 & k=n \end{cases}$
Anualidad vida entera (vitalicia) diferida *n* años	${}_kV\left({}_{n\rvert}\ddot{a}_x\right)$	$\begin{cases} {}_{n-k\rvert}\ddot{a}_{x+k} - P\left({}_{n\rvert}\ddot{a}_x\right)\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}\rvert} & k<n \\ \ddot{a}_{x+k} & k \geq n \end{cases}$

En forma adicional a los procesos analizados, pueden presentarse casos de seguros con primas *semicontinuas*, donde la prima es anual y el pago del seguro es de tipo continuo, etcétera.

Se puede concluir que cuando se efectúa el cálculo de primas y reservas utilizando como base el modelo presentado, se obtienen las mismas expresiones clásicas utilizadas desde los orígenes del cálculo actuarial.

Sin embargo el nuevo enfoque de las matemáticas actuariales permite establecer dos importantes funciones aleatorias, la del *valor presente de beneficio(s)* y la de *pérdida,* dependientes del tiempo futuro sobre (x), donde la función de probabilidad asociada a ese tiempo de (x), determina las funciones clásicas ya conocidas y además, es posible determinar otros elementos como la varianza, la moda, la mediana y otras características numéricas que bajo el enfoque clásico se carecen y resulta de gran utilidad para la operación de los seguros; en subsecuentes trabajos se abordaran las bondades de este enfoque.

Bibliografía:

{1} Bower, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt. 1986. *Chap. 3 Survival Distributions and life table,* p.45. ***Actuarial Mathematics***, Society of Actuaries. Itasca, Illinois

{2} Bower, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt. 1986. *Chap. 3 Survival Distributions and life table,* p.50. ***Actuarial Mathematics***, Society of Actuaries. Itasca, Illinois

{3} Chester Wallace Jordan, Chap. 2 Life Annuities, p.46. *Life Contingencies*, Society of Actuaries (1967) Chicago, Illinois

Referencias

4 Aranda Martínez Oscar & Castillo García Nadia Araceli. 2000 Apuntes personales, dictados en el curso regular de la material de *Matemáticas Actuariales del Seguro de Personas I,* Fac. de Ciencias UNAM.

5 Vega Amaya, Oscar. 2002. Surgimiento de la Teoría Matemática de Probabilidad. Apuntes de la Historia de las Matemáticas, vol. I.España.