

# Universidad Nacional Autónoma de México

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
PLANTEL NAUCALPAN

*Club de Matemáticas*



## **GEOMETRIA**

PROBLEMAS ELEMENTALES

Selección de problemas, para desarrollar habilidades

Matemáticas en alumnos del bachillerato

*Por: Héctor García Sánchez*



En matemáticas, el arte de proponer un problema  
Debe considerarse más valioso que el resolverlo.

Georg Cantor, en su disertación doctoral.

# INTRODUCCION

*La labor educativa en el Colegio es una experiencia viva que crece y se desarrolla de manera permanente, sus problemas y rasgos contradictorios, son reto permanente a enfrentar por alumnos y profesores, quienes en lo esencial determinan dicho proceso.*

*Así en el caso de la enseñanza de la matemática si bien existen infinidad de cuestiones a resolver. Dos me parecen de vital importancia y se dan desde el inicio de las clases:*

*Una es cuando el alumno asiste al salón de clase, ¿Qué actitud presenta hacia la matemática? Rechazo, aceptación o indiferencia. La respuesta, se da en función de la voluntad, de lo afectivo y en una palabra es una respuesta psicológica, misma que construyó a partir de sus vivencias en los cursos que cubrió durante su estadía en Primaria y Secundaria. Las experiencias adquiridas en los años pasados, han producido un estudiante con actitud definida en el salón de clase.*

*Una segunda cuestión es ¿Qué tanto se corresponde el Colegio, su filosofía y métodos de trabajo, a un estudiante que cuenta con una formación escolar previa? Formación en la cual estilo de trabajo, actitudes y valores sobre: Escuela, Profesor, labor académica durante nueve años se ha definido en alguna dirección. De no existir congruencia entre lo que se tiene de estudiante y lo que se quiere formar en el Colegio, se debe trabajar en formar un egresado de él a la par que se implementan los programas de estudio.*

*Generar en el alumno una actitud crítica, reflexiva que sea componente en el desarrollo de su personalidad, es parte de los valores que deben adquirir en su paso por el Colegio, así pues dentro y fuera del salón de clase el Colegio debe proponer actividades a los alumnos, que apunten en adquirir esta formación.*

*El Club de Matemáticas, es un espacio que si bien esta fuera del aula, su razón de ser, apunta hacia generar en el alumno una actitud de aceptación de la Matemática: Despertar el interés por la Matemática, este es el reto al que nos enfrentamos. Así la actividad de este espacio es diversa, en unos casos se parte del juego, el acertijo, la paradoja, el rompecabezas, esto es de aquel planteamiento que es un reto al intelecto, y que con disposición se pone atención en comprender el*

*problema, se invierte tiempo reflexionándolo y al encontrar la solución produce satisfacción, que no quede duda que este juego lúdico es parte de la Matemática. En otros casos se intenta darle un seguimiento a aquellos alumnos que muestran interés y disposición por profundizar en el mundo de la Matemática más allá de lo aprendido en el salón de clase. Así durante quince años se ha trabajado con alumnos introduciéndolos en el estudio de la Matemática fuera del salón de clase, en cursos de solución de problemas, los que se imparten en dos sesiones semanales de dos horas de duración, durante todo el año. A estos cursos asisten estudiantes de cualquier turno y semestre, siendo común que existan alumnos en este tipo de cursos que asistieron durante todo el tiempo en que cursaron su bachillerato en el Colegio. Los cursos en lo fundamental están conformados por problemas de Aritmética, Álgebra y Geometría, sin embargo, dado que la asistencia a los cursos esta regida por el interés que se despierta en el alumno, el público que asiste a los cursos es heterogéneo y fluctuante, lo cual impide que los cursos sean escolarizados, esto es, que lleven una secuencia o aumento en el nivel de dificultad conforme progresa el curso, así cada problema que se presenta en tales cursos debe ser original, presentarse de manera que puedan participar en su discusión cualquiera de los asistentes, sin embargo es común notar que en este tipo informal de cursos, la gran mayoría de los asistentes, toman notas y tratan de llevar organizados, los problemas que se discuten.*

*Por lo cual considero que si estos alumnos contaran con materiales escritos en los que se aborden los problemas que se discuten en el curso, les sería de utilidad.*

*El presente trabajo es un segundo material, el cual consiste en una recopilación de problemas de Geometría, que van de un nivel de dificultad elemental a problemas que aun cuando son de mayor grado de dificultad pretenden mantener el interés en el estudiante, por su originalidad, los cuales pretende ser un intento, por presentar problemas apropiados, a la vez que se dirigen a aquellos alumnos que se inician en un trabajo más sistemático de solución de problemas. Y en general para aquellos alumnos que fuera del salón de clase desean seguir reflexionando sobre el contenido de la matemática.*

### ***Sobre el contenido de este trabajo.***

*Dados los avances actuales de la tecnología, resulta natural pensar que en la mayor parte de los alumnos existe una gran experiencia de visualización, esto es, después de pasar horas y horas frente a cine, televisión, videojuegos, computadoras, resulta evidente suponer que ha desarrollado habilidades para analizar la forma, quizá con más éxito que otras actividades que se pretende enseñar en los espacios escolarizados, como son: lectura, escritura o bien operaciones aritméticas, que requieren del uso de escribir símbolos. Es decir hay una experiencia previa en el alumno, que debe utilizarse para la enseñanza de la geometría.*



Por otra parte al referirnos a la enseñanza de la geometría, Es común en el profesor considerar el trabajo de **Los Elementos** de Euclides. Trabajo que es una sistematización, modelo de pensamiento lógico deductivo, el cual no sólo sirvió para estructurar otras ramas de la matemática, sino que ha sido utilizado en obras con temas tan diversos como la **Ética** de Spinoza o bien la **Mécanique Analytique** de Lagrange. Por tal razón durante más de 2000 años la Geometría ha sido presentada a los aprendices de todo el mundo, con la mayor aproximación posible al texto de Euclides. Inhibiendo la creatividad y apagando el interés por la materia en la mayoría de los alumnos.

Distinta sería la historia de la enseñanza de la geometría, si se siguiera la forma de trabajar de Arquímedes, quien en vez de realizar una construcción deductiva, en su trabajo el **Método**, explica como muchos de sus resultados son fruto de experimentos realizados sobre modelos físicos, obtenidos por medio del ensayo y error, esta es la historia que está detrás de cualquier éxito científico.

Así pues la intención de este material intenta desarrollar el interés y la reflexión sobre la forma, a partir de la búsqueda de soluciones que requieran experimentar respuestas, con objeto de que contribuya a producir en el alumno una mayor madurez sobre su pensamiento geométrico y le permite aprehender posteriormente una construcción axiomática de la Geometría.

En cuatro partes está dividido el presente material, a saber:

Una parte introductoria breve, donde se da una exposición de motivos más amplia, sobre los cursos de solución de problemas, pensamos que en tales líneas se esbozan ideas centrales que sustentan el proyecto en general de trabajo que impulsamos en el Club de Matemáticas. A la vez se dan algunas recomendaciones metodológicas, para abordar los problemas.

La segunda parte son la presentación de los problemas (165 en 15 capítulos). La característica que presentan estos es: problemas de Geometría fundamentalmente, de un nivel elemental (Problemas que en su solución los conocimientos de geometría a nivel Secundaria, son suficientes, para resolver dichos problemas). Estos problemas están clasificados según su apariencia, así se tienen secciones de problemas de: monedas, de movimientos de vehículos, fichas de dominó, etc. A diferencia de problemas que aparecen como apoyo a cursos de matemáticas en el Bachillerato, en estos el ingenio y la imaginación juegan un papel muy importante para encontrar la solución, así en vez de ser ejercicios de matemáticas en los cuales se trata de reafirmar conocimientos, se pretende en todo momento presentar en el alumno situaciones en las que no esté familiarizado, y se vea obligado a desarrollar método de análisis y reflexión para atacar los problemas.

En la tercera parte del trabajo se presenta la solución de cada problema, siendo recomendable para el alumno tratar por todos los medios de revisar esta sección, sólo después que haya resuelto los problemas.

*Por último en la cuarta parte de este trabajo se da una bibliografía a los alumnos en la que aparecen problemas de un nivel equivalente al del presente trabajo.*

*Agradezco de antemano las críticas que se presenten al presente trabajo, cabe mencionar mi agradecimiento a Rene Hecatzin G. G., por el mecanografiado de los problemas.*

*Naucalpan de Juárez, a 4 de agosto de 2004.*

## **Razón de ser de los cursos de Solución de problemas.**

Contar con una buena habilidad para resolver problemas, es algo que todo alumno desea poseer, puesto que por experiencia sabe que cualquier evaluación en matemáticas presenta como parte central, una sección de problemas.

Más cómo se desarrolló dicha habilidad, puesto que desde el nivel de Primaria, los alumnos resuelven miles de problemas y sin embargo son pocos los alumnos que frente a un problema de un tipo que no les es familiar cuentan con un método de atacar el problema, y resulta frecuente que en ellos sin importar los conocimientos que requiere el problema para su solución, se confunden y no saben como resolverlo, situación que con el tiempo contribuye en crear una actitud de rechazo, cuando se le plantean tales situaciones.

Una técnica de enseñanza muy frecuente consiste en generar un aprendizaje por imitación, donde se revisa los avances del alumno a partir de que éste reproduzca los esquemas o procedimientos que se le enseñan, así al hacer ejercicios el alumno nota sus avances y perseverando en la reproducción de un buen número de ejercicios domina las técnicas que se le enseñan, sin embargo en este aprendizaje al presentar al alumno problemas no familiares, genera grandes dificultades produciendo una falta de seguridad respecto de lo que el alumno conoce.

Dado el desarrollo del conocimiento, la Escuela en vez de enseñar a resolver todo tipo de problemas, lo cual es imposible, debe pasar a enseñar métodos de análisis para resolver problemas.

Actualmente en el mundo diversas corrientes educativas abordan dicha problemática saber:



- a) Algunas proponen crear espacios de reflexión y discusión, llámense Clubes de Matemáticas, talleres, campamentos de la ciencia, Concursos a diversos niveles, etc.
- b) Otros elaboran materiales, ya sea colecciones de problemas (con respuestas y ciertas indicaciones para encontrar la solución); o bien se elaboran materiales en los que se presentan ciertas indicaciones y recomendaciones generales (heurísticas) para resolver problemas y buscar las soluciones.
- c) Otro tipo de investigación se ha desarrollado en el campo de la Psicología, donde se trata de establecer claridad en el proceso que conforma la actividad general de resolución de problemas, es el caso de la formación del concepto Habilidad Matemática, su relación con la formación de hábitos y destrezas, que faciliten dicho proceso y contribuyen en el desarrollo de dicha Habilidad Matemática.

A partir del Club de Matemáticas y en particular los cursos de solución de problemas, pretendemos contribuir en función de nuestros recursos, al planteamiento propuesto, y que consiste en:

- a) Contar con un espacio de trabajo, en el cual los alumnos que asisten adquieran métodos de solución de problemas.
- b) Que las experiencias adquiridas, sean base de análisis del proceso que constituye la actividad general de resolución problemas.

## **Algunas recomendaciones para el alumno.**

**R**especto de la actitud del alumno. Se requiere una actitud analítica, más ¿cómo se forma tal actitud? Dado que cuando se plantea un problema no se tiene en ese momento una solución, genera en el alumno dudas sobre su capacidad para resolverlo y por tanto genera ansiedad, abandonar el problema sin estar seguro que no se cuenta con los elementos suficientes para resolverlo no es adecuado, saberse sobreponer a esa crisis emocional, se traduce en persistir en el análisis del mismo y llegas a una solución, logrando esto se producirá un estado de animo de satisfacción, a la vez que genera un estado de seguridad en el propio alumno, lo que no sólo produce en su pensamiento un conocimiento significativo, sino que produce un actitud frente a los problemas.

Al resolver cada problema te sugiero que pongas atención al procedimiento que utilizas para llegar a la solución, algunas recomendaciones que no están de más son las siguientes:

- a) Intenta comprender totalmente el problema, establece qué se pregunta, que condiciones o datos se dan y que relación existe entre los datos y lo que se pregunta.
- b) Una vez que se tiene diferenciadas las cuestiones: ¿Qué se sabe?, ¿Qué se quiere? y ¿Qué se puede usar? Inicia un primer intento de solución del problema.
- c) Inicia un proceso en que des rienda suelta a tu imaginación para formular conjeturas de posibles soluciones, y una vez construida trata de ser lo más riguroso para comprobarlas, revisa que se mantiene de la conjetura y que se debe desechar para reiniciar dicho proceso, cada vez con más elementos que permiten construir una conjetura más amplia y sólida.
- d) Si un problema es demasiado complejo, plantéate un problema más sencillo (del mismo tipo).
- e) Una vez que llegues a una solución compruébala, analiza si la solución es única o si el problema admite varias soluciones.
- f) Una vez resuelto el problema, antes de pasar al siguiente, reflexiona sobre aspectos como los siguientes:
  - ¿Qué problema resulta si cambio alguno de los datos del problema?
  - ¿Se puede generalizar dicho problema?
  - ¿Qué problema es similar al resuelto?
  - ¿Puedo formular un problema a partir del que resolví?

Trata de dar respuesta a tales cuestionamientos.

- g) En caso de que no avances en la solución, te sugiero que en vez de pasar a la sección de respuestas, hagas lo siguiente: plantea el problema a tus compañeros, consulta algún texto y vuelve a atacar el problema, pregunta a algún profesor o acude al Club de Matemáticas, donde con seguridad encontrarás alguien que con gusto esté dispuesto a discutir contigo las dificultades que presenta el problema y orientará para que lo logres resolver.

*Índice*

		<i>Páginas</i>	
<i>I. Introducción.</i>		<i>I - IX</i>	
		<i>II. Enunciados</i>	<i>III. Soluciones</i>
1.	<i>Figuras.</i>	2	44
2.	<i>Diseción</i>	5	49
3.	<i>Monedas</i>	9	55
4.	<i>Recorridos</i>	12	60
5.	<i>Ajedrez</i>	15	63
6.	<i>Reloj</i>	18	67
7.	<i>Tubos</i>	19	68
8.	<i>Áreas y distancias</i>	22	72
9.	<i>Puntos</i>	25	77
10.	<i>Simetría</i>	27	81
11.	<i>Movimiento de vehículos</i>	29	83
12.	<i>Moviendo objetos</i>	33	87
13.	<i>Terillos</i>	36	91
14.	<i>Domino</i>	38	93
15.	<i>Poliminós</i>	41	98
<i>IV. Bibliografía.</i>		101	