Aplicando el Axioma del Supremo

Manuel Ibarra Contreras, Armando Martínez García

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Puebla , México

El objetivo de este artículo es aplicar el Axioma del Supremo para demostrar los siguientes resultados

$$\textbf{Para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R} \textbf{ existe } \mathbf{a} \in \mathbb{Z} \textbf{ tal que } \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a+1}). \tag{1}$$

$$\textbf{Para cada } \alpha \geq \mathbf{0} \textbf{ existe } \mathbf{x_0} \in \mathbb{R} \textbf{ tal que } \mathbf{x_0^2} = \alpha. \tag{2}$$

La intención de esta presentación es que sirva de apoyo a los estudiantes de primer ingreso de una Facultad de Ciencias y que se inician en el estudio axiomático de los números reales. También es importante destacar que el primer resultado se puede obtener usando solamente la Propiedad Arquimediana de los números reales sin usar el axioma del supremo, no obstante aquí quisimos verlo como una aplicación de éste último.

Para probar el segundo resultado, sí necesitamos de la completez de los números reales, es decir, el axioma del supremo es necesario para probar su validez y para ello basta señalar que sin este axioma es imposible probar (2) para $\alpha = 2$.

Comenzaremos dando las definiciones y resultados que usaremos para obtener (1).

Denotaremos con $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ a los conjuntos de números reales, enteros y naturales, respectivamente.

Es conocido (ver Teorema 6.1 de [2005]) que si $a \in \mathbb{Z}$ entonces

$$(a, a+1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset. \tag{3}$$

Ahora, si $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$ son tales que $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ entonces

$$b = a + 1. \tag{4}$$

En efecto. Si $b < a + 1$, como $a < b$ entonces $b \in (a, a+1)$, de donde $(a, a+1) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ lo cual contradice (3).

Si $a+1 < b$, como $a < a+1$ entonces $a+1 \in (a, b)$, de donde $(a, b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ lo cual contradice nuestra suposición.

Como consecuencia, por tricotomía se tiene que $b = a + 1$.

Con lo anterior tenemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 1. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$. Entonces*

$$(a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset \text{ si y sólo si } b = a + 1.$$

Enunciemos ahora el Axioma del Supremo y algunos resultados obtenidos a partir de él.

Recordemos antes la siguiente definición.

Definición 2. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$.*
i) a_0 es cota superior de A si para todo $a \in A$, $a \leq a_0$.está
ii) a_0 es cota inferior de A si para todo $a \in A$, $a_0 \leq a$.

En caso de que se dé el inciso (i), diremos que A está acotado superiormente y si esto no se satisface diremos que A no está acotado superiormente.

En forma análoga, en caso de que se dé el inciso (ii), diremos que A está acotado inferiormente y si esto no se satisface diremos que A no está acotado inferiormente.

Definición 3. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. a_0 es el supremo de A si:*
i) Para todo $a \in A$, $a \leq a_0$ y
ii) Si para todo $a \in A$, $a \leq c$, entonces $a_0 \leq c$.

Axioma del Supremo. Si $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente entonces A tiene supremo, es decir, existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que a_0 es el supremo de A.

Los siguientes resultados se siguen del Axioma del Supremo.

Teorema 4. *$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Como $\mathbb{N} \neq \emptyset$, aplicando el Axioma del Supremo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha = sup\, \mathbb{N}.$$

Como $\alpha - 1 < \alpha$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < n_0$ de donde $\alpha < n_0 + 1$ lo cual contradice la definición de α. □

Corolario 5. *$\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente.*

Demostración. Para esto es suficiente observar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. □

Corolario 6. *$\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente.*

Demostración. Es suficiente observar que $\mathbb{N}_- = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}_-$ no está acotado inferiormente, lo cual se sigue del Corolario 5. □

Definamos ahora el máximo y mínimo de un conjunto.

Definición 7. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a_0 \in A$.*
i) a_0 es el máximo de A si para todo $a \in A$, $a \leq a_0$
ii) a_0 es el mínimo de A si para todo $a \in A$, $a_0 \leq a$.

Notemos que si $A \subset \mathbb{R}$ tiene máximo, digamos a_0, entonces A tiene supremo, a saber, $a_0 = sup\ A$; pero si A tiene supremo, no necesariamente tiene máximo, por ejemplo, $A = (0, 1)$ tiene al 1 como supremo pero no tiene máximo.

Teorema 8. *Sean $A \subset \mathbb{Z}$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado superiormente. Entonces*

$$A \text{ tiene máximo.}$$

Demostración. Como $A \subset \mathbb{Z}$, entonces $A \subset \mathbb{R}$ y, dado que $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = sup\ A$. Así, $\alpha - 1$ no es cota superior de A, es decir, existe $n_0 \in A$ tal que $\alpha - 1 < n_0 \leq \alpha$.

Si $n_0 < \alpha$, existe $m \in A$ tal que $n_0 < m$. Por lo tanto, $m - n_0 > 0$ y $m,\ n_0 \in \mathbb{Z}$, es decir, $m - n_0 \in \mathbb{N}$ lo cual implica que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m - n_0 = r$ o, lo que es lo mismo, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m - r = n_0$. Ahora, como $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ y así, $-r \leq -1$, obtenemos que $\alpha - r \leq \alpha - 1 < m - r$, es decir, $\alpha < m$ que es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $n_0 = \alpha$ lo que nos dice que n_0 es el máximo de A.

□

Corolario 9. *Sea $A \subset \mathbb{Z}$ con $A \neq \emptyset$ y A acotado inferiormente. Entonces*

$$A \text{ tiene mínimo.}$$

Ahora sí, podemos dar la demostración del primer resultado enunciado al inicio de este escrito.

Teorema 10. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x \in [a, a+1).$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces $x \in \mathbb{Z}$ o $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $x \in [x, x+1)$.

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, del Corolario 5, se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x < n_0$. Sea

$$B = \{\ n \in \mathbb{Z} : x < n\}$$

es claro que $n_0 \in B \subset \mathbb{Z}$ y, en consecuencia, $B \neq \emptyset$ y B es acotado inferiormente. De donde aplicando el Corolario 9, B tiene mínimo. Sea $b = min\ B$.

Análogamente, del Corolario 6, se sigue que existe $n_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n_1 < x$. Sea

$$A = \{\ n \in \mathbb{Z} : n < x\}$$

es claro que $n_1 \in A \subset \mathbb{Z}$, es decir, $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, de donde, aplicando el Teorema 8, A tiene máximo. Sea $a = max\ A$.

Es claro que $x \in (a, b)$. Afirmamos que $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

En efecto, si $(a, b) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$ podemos considerar $r \in (a, b) \cap \mathbb{Z}$ de donde obtenemos que $r \in (a, b)$ y $r \in \mathbb{Z}$ lo cual implica que $a < r < x$ o $x < r < b$.

Si $a < r < x$ entonces $r \in A$ lo cual contradice la definición de a.

Si $x < r < b$ entonces $r \in B$ lo cual contradice la definición de b.

Por lo tanto $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ de donde, aplicando el Teorema 1, tenemos el resultado deseado. $\square$

El siguiente teorema nos permitirá obtener el segundo resultado enunciado al inicio de esta exposición. Este es equivalente a uno de los resultados fundamentales del Cálculo, el Teorema del valor intermedio, el cual no se puede probar sin el axioma del supremo.

Teorema 11. *(Ver teorema II.7 de [2005]) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, con $f(a) < 0 < f(b)$ ó $f(b) < 0 < f(a)$. Entonces*

$$\textit{existe } x_0 \in (a, b) \textit{ tal que } f(x_0) = 0.$$

Corolario 12. *Sea $\alpha \geq 0$. Entonces*

$$\textit{existe } x_0 \in \mathbb{R} \textit{ tal que } \alpha = x_0^2.$$

Demostración. Observemos que $\alpha = x_0^2$ si y sólo si $x_0^2 - \alpha = 0$, por lo tanto, si definimos la función

$$f(x) = x^2 - \alpha$$

tenemos que la existencia de x_0 se convierte en el problema de encontrar una raíz para f.

Es claro que f es una función continua en $\mathbb{R}$ y que $f(0) \leq 0$. Si $f(0) = 0$ ya terminamos y si $\alpha > 0$, del Teorema 4, se sigue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n_0 > 1$, de donde se sigue que $n_0^2 > n_0 > \alpha$. Ahora, $n_0^2 > \alpha$ si y sólo si $n_0^2 - \alpha > 0$, así que $f(n_0) > 0$.

Por lo tanto, si consideramos la función

$$f : [0, n_0] \to \mathbb{R}$$

dada por $f(x) = x^2 - \alpha$, ésta satisface las hipótesis del Teorema 11.

Entonces existe $x_0 \in (0, n_0)$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = x_0^2$. $\square$

Notemos que el Corolario 12 enuncia la existencia de las raíces cuadradas de números reales no negativos. Con un argumento similar, cambiando las potencias al cuadrado por potencias n-ésimas en la demostración anterior, se obtiene la existencia de raíces n-ésimas de números reales no negativos.

Agradecimientos

Agradecemos la cuidadosa revisión de los árbitros anónimos. Sus comentarios y sugerencias permitieron mejorar la presentación final de este trabajo. Por supuesto, reclamamos como nuestra, la responsabilidad de los errores u omisiones que, de manera involuntaria, aún permanecen en él.

Referencias

[2004] J. Juan Angoa Amador, Agustín Contreras Carreto, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Linares Gracia, Armando Martínez García. *Matemáticas Elementales.* Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2004.

[2005] J. Juan Angoa Amador, Jaime Arroyo García, Agustín Contreras Carreto, David Herrera Carrasco, Manuel Ibarra Contreras, Raúl Linares Gracia, Fernando Macías Romero, Armando Martínez García, Celestino Soriano Soriano, Fernando Velasquez Castillo. *Cálculo diferencial en una variable.* Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2005.