

Universidad Nacional Autónoma de México.

Facultad de Ciencias.
Licenciatura en Física.

Practica Libre.
Tippe Top.

Adrián Emilio Flores Trujillo.
Emilio L. Roth Monzón.
Carlos Argáez García.

Asesor:
Gregorio Ruiz Chavarría.

Objetivo:

Cuantificar la velocidad y la aceleración angular con la que se mueve el Tippe Top y a partir de estos datos, calcular la torca con la que se inicia el movimiento y de ser posible la torca que realiza la fricción. Y de estos datos obtener una relación entre la masa y la torca que se requiere para el movimiento del Tippe Top.

Introducción:

Durante mucho tiempo las perinolas han sido objeto de asombro en diversas civilizaciones. Las hay de diversas formas, tamaños y colores, por supuesto con distintas funciones y gracias, desde divertirnos cuando somos pequeños, pasando por las que sirven para los juegos de mesa y demás y por supuesto las que más hipnotizan: Tippe Top.

Hasta hace no mucho tiempo, el extraño comportamiento de ésta perinola especial era objeto de muchas dudas. Ésta perinola tiene forma de hongo, es decir: consta de una cabeza semiesférica y de un perno. La peculiaridad de éste juguete radica en que al

hacerla girar sobre su parte esférica, asombrosamente se invierte, llevando su centro de masa a una posición superior a la que se encontraba (el centro de masa se encuentra en la semiesfera ya que la masa del perno es muy pequeña), desafiando de alguna manera a la gravedad.

Lo primero que se nos ocurrió para analizar el comportamiento de esta perinola fue construir diversos prototipos: mandamos a elaborar Tippe Tops de distintos materiales y proporciones. De esta manera nos convencimos de que el juguete tenía que tener ciertas proporciones para que logrará invertirse y que dependiendo del material del que estuviera hecha y la superficie en que la rodáramos tardaba distintos tiempos en invertirse. Lo que nos hizo pensar que el coeficiente de fricción era un factor que seguramente importaba.

Esto sucede porque al existir fricción el sistema se vuelve no conservativo y por tanto existe pérdida de energía, que provoca una disminución en su velocidad angular lo que significa que gran parte de la energía cinética va cambiando gradualmente a potencial (porque el perno se va alejando del eje de presesión), hasta que llegado el momento el perno toca el suelo y la perinola bruscamente salta (perdiendo bastante energía) llegando a su estado de mínima energía rotacional.

En realidad, la inversión de la Tippe Top es un fenómeno de disipación (pérdida de energía). Al parecer según Cohen (véase Bibliografía) la fricción que actúa aquí es proporcional a la fuerza normal extendida en la superficie del punto de contacto y se opone al movimiento de la Tippe Top en ese punto, por lo tanto, mientras el objeto en cuestión comienza su movimiento la fuerza de fricción es máxima, de la misma manera que cuando logra invertirse, y mientras se empieza a invertir la fuerza de fricción disminuye pues en el punto de contacto no actúa todo el peso del juguete.

Otro punto que nos parece de suma importancia es que al parecer la mayoría de las Tippe Tops (en nuestra posesión) que lograban invertirse, cuando las colocábamos sobre el piso sin rotarlas parecía que era imposible recargarlas sobre el perno, lo que indicaba una clara inestabilidad en ese punto. Ciertamente lo contrario a lo que sucedía cuando la rotábamos, donde parecía que el punto estable se encontraba cuando ésta rotaba sobre el perno.

A decir verdad, el comportamiento de ésta perinola es de una complejidad sorprendente, debido a que junta 3 tipos de movimientos: rotación, presesión y nutación.

En el análisis experimental de éste artículo pondremos especial importancia al ángulo de nutación que parece guardar ciertas regularidades bastante interesantes.

Para las pruebas experimentales utilizamos una cámara de alta resolución la cual puede capturar miles de imágenes en un segundo; lo que nos permitió estudiar a detalle el sus ángulos y velocidades.

Experimentado también pudimos notar que la fuerza de fricción es paralela a la superficie en donde rota la tippe top. Desde que la dirección horizontal de fuerza rota rápidamente con la frecuencia angular w de la perinola en el instante en que se acentúa la

fuerza de fricción el centro de masa cambia ligeramente su estado de movimiento. Lo que nos dice que el centro de masa de la perinola está localizado cerca del centro de curvatura (centro primordial en donde se realizan los movimientos de nutación y presesión).

Las Formulas a Utilizar son:

$$\omega = \frac{2\pi}{t}$$

Donde :

$$\omega = \text{Velocidad Angular.} \left(\frac{\text{Rad}}{\text{s}} \right) \quad \text{Ecuación 1.}$$

t = Tiempo (s).

$$\Gamma = I\alpha$$

Donde :

$$\Gamma = \text{Torca.} \quad \text{Ecuación 2.}$$

$$\alpha = \text{Aceleración Angular.} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right).$$

Desarrollo:

Para el desarrollo de ésta practica, se diseñaron diferentes tippe tops construidos con diferentes materiales y formas. Los materiales que se utilizaron para la construcción del tippe top fueron:

- Aluminio
- Madera
- Nylon
- Latón

La elaboración de dichas perinolas fue realizada por el taller mecánico de la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Cuando las perinolas fueron entregadas, se observaba que no todas se invertían, solo las de madera presentaban éste movimiento; las de aluminio se quedaban girando todas en la posición anterior a la inversión de la misma.

Se notó que las de aluminio no giraban puesto que el perno era de un material diferente, Latón, el cual tiene un peso específico diferente por lo cual se construyó un perno con aluminio como material el cual permitió que una de las perinolas de aluminio se invirtiese; las otras quedaron sin invertirse, por lo cual se prosiguió a extraer tanta masa como fuese posible de las perinolas de aluminio que no se invirtieron.

Una vez que las perinolas fueron echas se procedió primero a jugar con ellas, para así poder observar el fenómeno y familiarizarse con él, puesto que en nuestra opinión es importante dominar el juguete y poder controlar su movimiento inicial con habilidad y destreza; para esto se jugó con la perinola sobre muchas superficies diferentes todas entre ellas y con diferentes fricciones.

Es importante mencionar que las perinolas tenían todas diferentes reacciones en la misma superficie, pues la fricción entre la superficie y los materiales de las diferentes perinolas nunca era la misma.

Las Tablas con las medidas de los diferentes Tippe Tops realizados se muestra a continuación en la tabla 1.

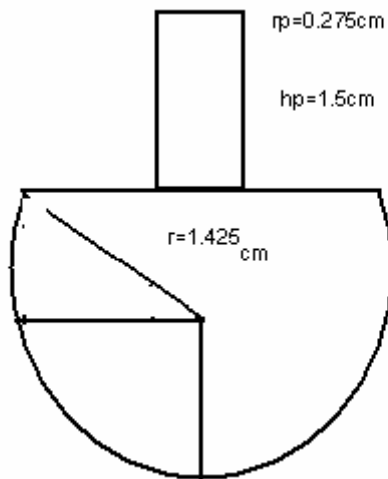
Tabla 1.

Material.	Altura Bastidor. (cm)	Diámetro esfera. (cm).	Diámetro Bastidor. (cm).	Masa. (g)
Al 1	1.8	3.05	0.6	37.4
Al 2	1.8	3.05	0.6	37.4
Madera	1.75	3.2	0.5	9.9

1				
Madera	1.8	3.2	0.5	9.6
Emilio	1.7	2.85	0.7	5.1
Nylon	1.9	3.15	0.6	30.774

La imagen a continuación muestra las dimensiones del tipe top que utilizamos para el experimento.

Imagen 1.



Aprendizaje de uso de la cámara rápida.

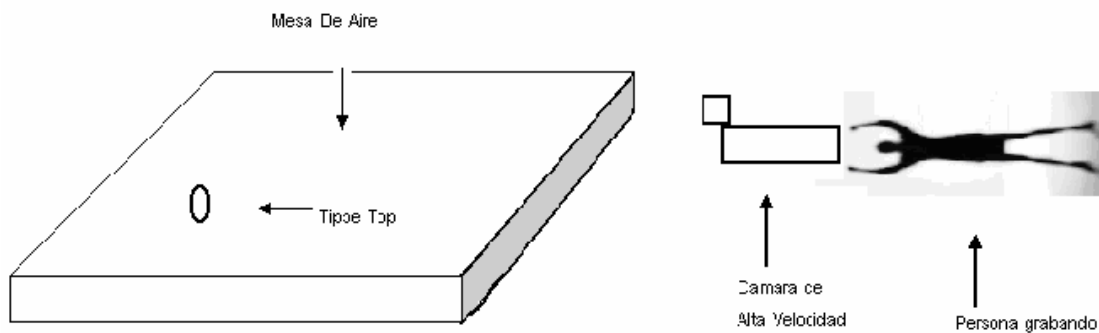
Aprender a utilizar la cámara rápida fue un reto puesto que la cámara registraba solamente los últimos 2 segundos de grabación y además solo grababa en una región del espacio limitada. Debido a esto fue necesario pensar en la posibilidad de la existencia de una superficie que permitiese la inversión rápida del juguete, pues en las primeras pruebas de grabación no fue posible registrar el momento de inversión puesto que no era posible seguir todo el movimiento de la perinola en el espacio antes de su inversión, el que requería un área grande en la cual girara y se desplazara. La obtención de tal superficie fue gracias a nuestro hincapié por jugar con las perinolas en sus distintas superficies. Dicha superficie fue la mesa de aire la cual, en teoría, elimina casi toda la fricción, pero como en éste caso no le fue suministrada una fuente de aire, la fricción fue tan solo la de la madera, la cual permitía que se invirtieran las perinolas en un tiempo corto. La desventaja fue que solo una perinola se invertía como nosotros deseábamos puesto que las demás seguían desplazándose mucho en poco tiempo con una nueva desventaja, los cables de la mesa de aire; lo cual no solucionaba el problema original.

Otro problema fue el manejo de la cámara mientras ésta filmaba pues era necesario mover la cámara y seguir el movimiento de la perinola. Esto no se podía hacer si la

cámara se encontraba sobre el suelo y la perinola girando en éste, pues se obtenía una imagen “aérea” poco útil del movimiento de la misma. Lo mismo ocurría con el juguete moviéndose sobre la mesa de aire. Éste problema se resolvió colocando la mesa de aire sobre el suelo y la cámara rápida también sobre éste; y con uno de nosotros tirado con la cámara en sus manos para que se pudiese seguir el movimiento en el piso como si quien grabara fuese un francotirador.

La Imagen a continuación muestra el montaje experimental.

Imagen 2.



Una vez corregidos todos los problemas que se presentaron para poder medir, se procedió a medir. Se hicieron varias tomas de las cuales solo una fue útil de la cual se obtuvieron todos los datos que en esta práctica se presentan.

Adquisición de los datos.

Queremos obtener la velocidad angular del tippe top antes de que se invierta y la variación de dicha velocidad con las mismas condiciones. Para la medición utilizando la cámara rápida se necesita primero conocer la frecuencia con la que la cámara rápida grava, pues la cámara puede grabar a frecuencias que varían desde 100 cuadros por segundo hasta 8000 cuadros por segundo, además de que fue necesario, durante las pruebas ya antes mencionadas; hasta que se decidió que la frecuencia que se utilizaría sería de 250 cuadros por segundo. Ya que ésta frecuencia de grabación nos pareció adecuada a nuestras necesidades para el experimento.

La cámara presentó un nuevo problema, que era la disminución de la visibilidad del objeto de estudio en incremento de la frecuencia de grabación. Por lo que nuestra decisión de la frecuencia mencionada se vio influenciada por éste detalle.

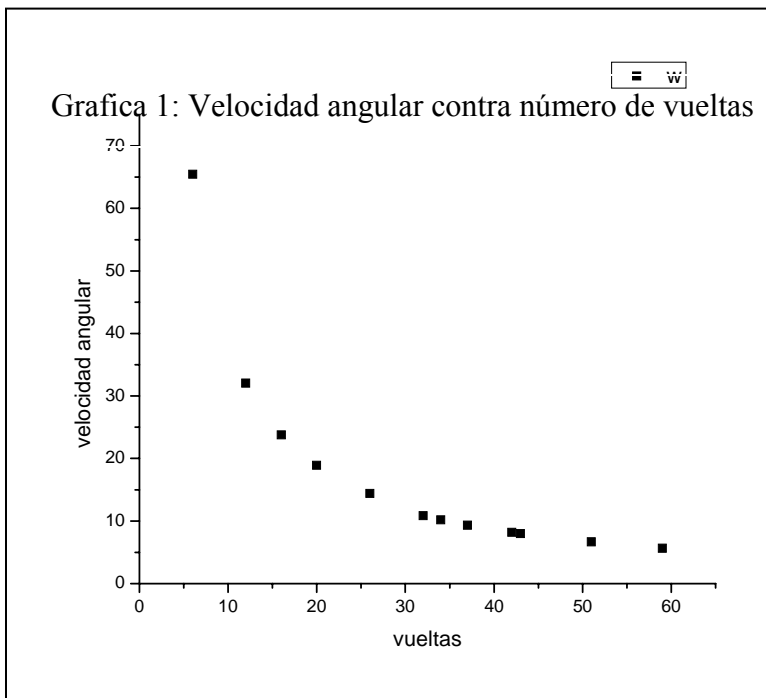
La adquisición de datos se realizó de la siguiente manera:

Se observo en que posición comienza el tipe top, y se tomó el tiempo en el cual le tomaba llegar hasta la misma posición nuevamente. Dicho tiempo se mesuraba contando los cuadros que transcurrían hasta que la perinola llegara de nuevo al mismo punto y éste número de cuadros era multiplicado por el inverso de la frecuencia y todo era invertido y multiplicado por 2π , tal y como se muestra en la ecuación 1, y la aceleración angular fue medida por el cambio en dicha frecuencia.

Los datos obtenidos se muestran en la tabla siguiente.

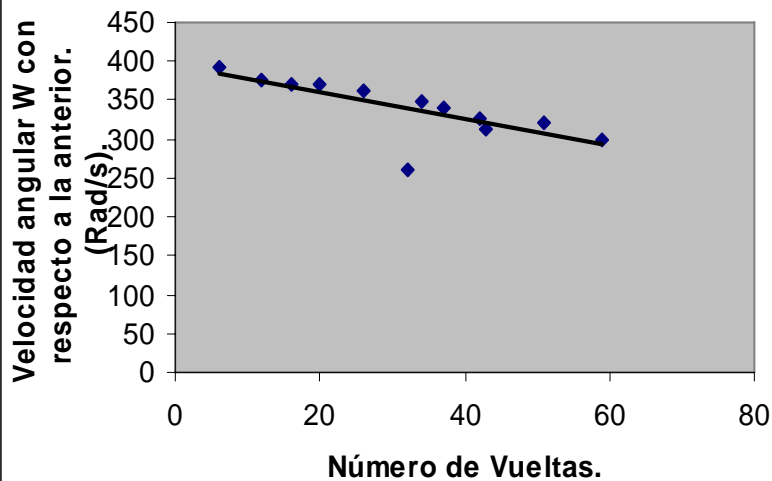
Cuadros	Numero de vueltas	Velocidad (Rad/s)	Cuadros	Numero de vueltas	Velocidad (Rad/s)	Ángulo. ^a
0-24	6	65.4498	0-24	6	392.6990	42
0-49	12	32.057	24-49	6	376.9911	37
0-66	16	23.799	49-66	4	369.5991	37
0-83	20	18.9252	66-83	4	369.5991	37
0-109	26	14.4109	83-109	6	362.4914	37
0-145	32	10.8330	109-145	6	261.7993	20
0-154	34	10.1999	145-154	2	349.0658	9
0-108	37	9.3499	154-168	3	339.5992	0
0-192	42	8.1812	168-192	5	327.2492	-22
0-197	43	7.9735	192-197	1	314.1592	-22
0-236	51	6.6569	197-236	8	322.2146	-26
0-278	59	6.6503	236-278	8	299.1993	-37

De los datos obtenidos se pueden obtener las siguientes gráficas.



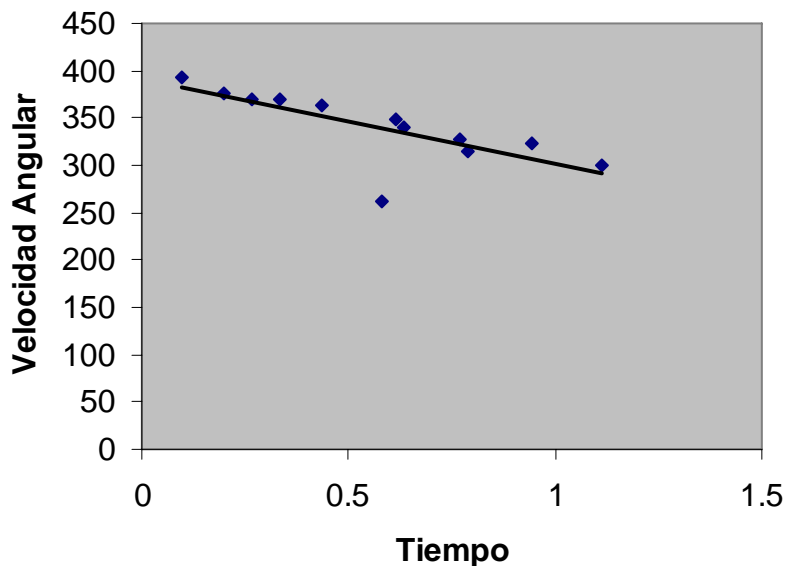
Gráfica 1: Ésta es la gráfica que muestra la relación entre la velocidad angular y el número de vueltas. Las unidades son: radianes entre segundo y el análisis de esta gráfica se realizara en la sección Análisis de gráficas.

**Grafica 2. W con respecto a la W anterior
contra Número de vueltas.**
 $w = -1.7222n + 394.64$



Grafica 2: Ésta es la gráfica que muestra la relación que existe entre la velocidad angular con respecto a la velocidad anterior y el número de vueltas. Las unidades están dadas por Radianes entre segundos. El análisis de esta gráfica se realizara en la sección Análisis de gráficas.

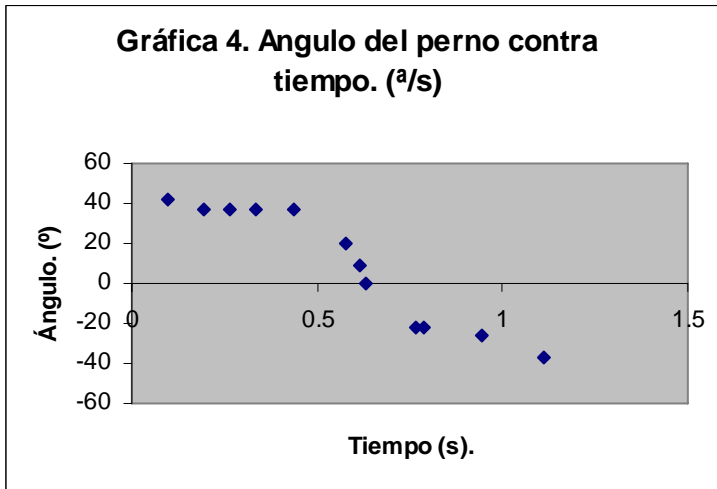
**Gráfica 3
Aceleración Anugular de la Particula**



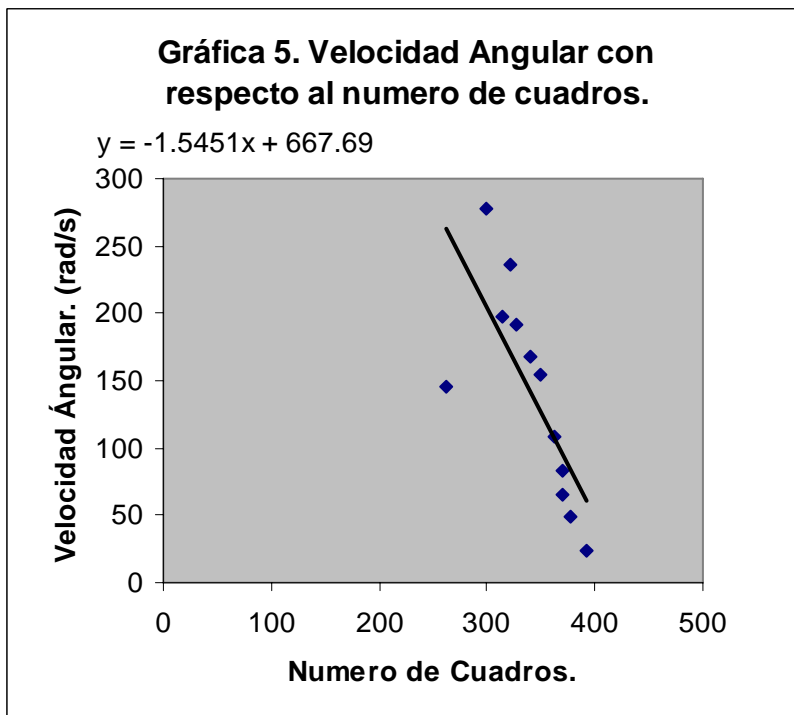
Gráfica 3: Ésta Gráfica muestra la relación que existe entre la velocidad angular y el tiempo. Las unidades están dadas por radianes entre segundos. El análisis de ésta gráfica se realizará en la sección Análisis de

$y = -89.932t + 391.08$

Gráficas.



Gráfica 4: Ésta Gráfica muestra de la variación del ángulo con respecto al tiempo. El análisis de ésta gráfica se realizará en la sección análisis de gráficas.



Gráfica 5: Ésta gráfica muestra la variación de la velocidad angular con relación al número de cuadros transcurridos. Las unidades de ésta gráfica están dadas por Radianes entre segundos. El análisis de ésta gráfica se realizará en la sección análisis de gráficas.

Análisis de Gráficas.

De la gráfica 1 se puede observar que la velocidad angular disminuye, hasta un punto mínimo, que es el punto en el que se invierte totalmente la perinola. Se observa que tiene un comportamiento asintótico pues la velocidad nunca puede ser cero, pues de serlo la perinola no podría girar de ninguna forma.

De la gráfica 2 que representa el número de vueltas contra la velocidad angular respecto de la velocidad anterior se puede observar que con forme el número de vueltas aumenta la velocidad angular w disminuye con una relación muy clara, dada por la ecuación:

$$w = -1.7222n + 394.64 \text{ Ecuación 3.}$$

Donde:

ω = Velocidad Angular con respecto a la anterior. (Rad/s).

n = Número de Vueltas.

Se puede observar que presenta una tendencia dada por una recta, que es diferente a la gráfica 1, lo cual indica que el cambio de la velocidad está dado en forma lineal, esto es posible pues en la gráfica 1 se trabaja con velocidades totales y en la gráfica 2 se trabaja con los cambios de las velocidades.

De la gráfica 3, la cual representa la relación que existe entre La velocidad angular y el tiempo se obtiene el cambio en dicha velocidad y por tanto la aceleración angular.

Se puede observar que la velocidad angular disminuye, como se mencionó antes, hasta que se invierte, la gráfica muestra solamente las velocidades que la perinola tenía hasta el momento justo antes de invertirse. La relación entre el tiempo y ésta velocidad es:

$$\alpha = -89.932t + 391.08, \text{ Ecuación 4.}$$

Donde :

α = Aceleración. (Rad / s²)

t = Tiempo. (s)

De ésta relación se puede observar que cuando el tiempo es cero, la aceleración angular es $391.08 \frac{rad}{s^2}$.

La gráfica 4 muestra la relación que existe entre los ángulos (de la línea que une al perno con el centro de masa, con la vertical) de las posiciones utilizadas para medir las velocidades. Se puede observar que aparentemente presenta una relación no muy bien definida, pero si se observa un poco más se observara que con forme el tiempo transcurre el ángulo disminuye, hasta la horizontal y más a bajo aun, cosa esperada pues el perno debe tocar el suelo. Una vez más todas las mediciones realizadas son hasta que la perinola se invierte.

La gráfica 5 muestra la variación de la velocidad angular con respecto del número de cuadros transcurridos; dicha relación ésta dada por:

$$w = -1.5451m + 667.69 \text{ Donde: Ecuación 5.}$$

w = Velocidad angular. (rad/s).

m = número de cuadro.

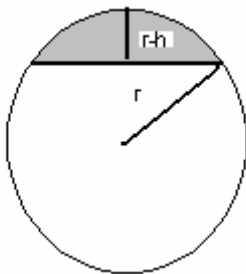
De donde se puede ver que cuando la perinola no ha dado ninguna vuelta su velocidad angular es: $\omega = 667.69 \frac{rad}{s}$, cuya velocidad es la velocidad inicial del movimiento.

Calculo del momento de inercia de la perinola.

Podríamos suponer que la perinola ésta está formada por la unión de dos cuerpos diferentes, es decir que la perinola es un cuerpo compuesto. Cuyos cuerpos que la forman son una semiesfera y un cilindro.

Para cuerpos que no presenten ésta regularidad se tendría que encontrar el momento de inercia de dicho cuerpo y nuestro juego es uno de éstos. Por lo tanto el momento de inercia se encontró de la siguiente manera:

Figura 3.



La figura 3 muestra el volumen (parte sombreada) de una sección de una esfera.

Sabemos que el volumen de la región sombreada es:

$$v = \frac{1}{3} \pi (r - h)^2 (2r + h) \text{ Ecuación 6.}$$

De modo que el volumen del resto de la esfera no sombreada es:

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi (r - h)^2 (2r + h) \text{ Ecuación 7.}$$

Donde:

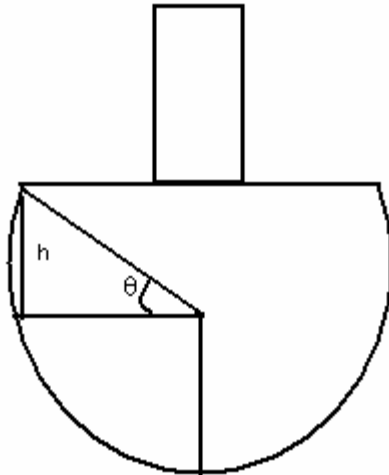
v = volumen total.

r = radio de la esfera = 1.425cm

h = altura = 0.6cm

De modo que la inercia rotacional del juguete es:

Figura 4.



La figura 4 muestra a la perinola que se está analizando, en donde la altura h es la altura medida desde la semiesfera hasta donde la esfera completa es cortada.

$$I = \rho \pi r^2 v + I_p = \rho \pi r^2 \left[\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi (r-h)^2 (2r+h) \right] + \frac{1}{2} \rho v_p r_p^2$$

En donde:

ρ = Densidad de la Madera.

r = Radio de la Esfera = 1.425cm

h = 0.6cm.

v_p = Volumen del Perno. = 0.6542cm³

r_p = Radio del perno. = 0.275cm

I = Inercia rotacional de todo el cuerpo.

La densidad de la madera varía según la madera en cuestión. Nuestro juguete ésta hecho de madera de pino la cual tiene una densidad de:

$$(0.31-0.76) \frac{g}{cm^3}$$

⇒

$$I = \rho \left\langle \pi r^2 \left[\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi (r-h)^2 (2r+h) \right] + \frac{1}{2} v_p r_p^2 \right\rangle = \rho 49.828 cm^5$$

Una vez obtenida la inercia rotacional de la perinola, se procede a calcular la torca que origino el movimiento, pues:

$$\Gamma = I\alpha$$

Donde :

Γ = Torca.

I = Inercia rotacional de todo el cuerpo.

α = Aceleración angular.

Para esto, se utiliza la aceleración angular que se calculo en la sección Análisis de Gráficas, de la gráfica 3.

De donde:

$$\Gamma = \rho 19486.73424 \frac{cm^5}{s^2} \text{ Ecuación 8.}$$

Ahora, el volumen total del cuerpo es:

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(r-h)^2(2r+h) + \pi h_p r_p^2 \text{ Ecuación 9.}$$

Donde las variables son las mismas expresadas anteriormente y h_p representa la altura del perno.

De modo que, el volumen de todo el cuerpo es:

$$v = 10.87354305cm^3$$

De donde si dividimos la torca que origino el movimiento entre el la masa del juguete se obtiene:

$$\frac{\Gamma}{\rho v} = 1792.123703 \frac{cm^2}{s^2} \text{ Ecuación 10.}$$

De donde se puede observar que, la torca es entonces:

$$\Gamma = 1792.123703 \frac{cm^2}{s^2} m_j \text{ Ecuación 11.}$$

Donde:

m_j = Masa del Juguete.

Pero si dividimos la velocidad que la partícula tenía en el momento en el que se empieza a parar, tomando la velocidad de la ecuación

Se obtiene que:

Se empieza a parar en el cuadro 270 por lo que:

$$w = -1.5451(270) + 667.69 = 250.513 \text{ rad/s}$$

Y dividiendo esto entre la masa, se obtiene:

$$\frac{w}{\rho v} = 23.0387647 \frac{rad}{\rho cm^3}$$

Pero $\rho = qg / cm^3$ Donde q es una constante, por lo que:

$$\frac{w}{\rho v} = \frac{23.0384647 \text{ rad}}{c \quad g}$$

Y éstas son las relaciones que buscábamos.

Los resultados obtenidos son:

La velocidad angular necesaria para que la perinola se volteé fue de:

$$\omega = 667.69 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La torca que originó éste movimiento fue:

$$\Gamma = 1792.123703 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2} m_j, \text{ donde éste resultado depende de la masa del juguete.}$$

Y de éste último resultado se puede pensar que si se cambia la masa del juguete y se sustituye en la ecuación 11 (Aquí también presentada), se obtiene la torca que se necesita para que un perinola con la geometría exacta se levante.

Observaciones.

Cabe mencionar que no se trató, en ésta práctica, con la fricción; la cual se sabe desde el principio que es determinante para el movimiento de la perinola. Por lo que la relación que proponemos es válida solamente para un cuerpo que presente el mismo coeficiente de fricción con el medio sobre el cual gira, que la que presentó la madera con la mesa de aire en la cual giró el cuerpo de estudio.

Con estos resultados calculamos solamente la velocidad angular que tenía la perinola al momento de levantarse y la torca que originó el movimiento.

Es importante mencionar también que las relaciones expresadas en la sección de resultados pueden variar y que se necesita seguir experimentando con las perinolas para poder concluir si son o no correctas; en ésta práctica no se concluye esto pues no pudimos grabar a las demás perinolas girando, pues al momento de grabar las perinolas de aluminio tardaban mucho en levantarse y además de que cubrían un área grande en su movimiento, y reflejaban mucho la luz que se le proporcionaba para que la cámara pudiera registrar el movimiento, lo cual impedía ver dicho movimiento con claridad pues el reflejo distorsionaba toda la imagen.

Conclusiones.

De los datos obtenidos y del proceso de los mismos realizado, se puede concluir que para todo cuerpo que presente la geometría del cuerpo aquí estudiado la ecuación 11 indica la torca que el cuerpo necesita para levantarse, siempre y cuando el coeficiente de fricción entre el objeto y la superficie fuesen iguales que los que el objeto estudiado aquí tenía, y de ser así, si se le da una torca mayor al cuerpo éste también se voltearía hasta que el dicho cuerpo disminuya su velocidad angular hasta que llegue a la necesaria para voltearse.

Podemos concluir que en ésta práctica obtuvimos lo que buscamos.

Bibliografía.

Manual de Fórmulas y tablas matemáticas.

Murria R. Spiegel.
Schaum.
Calculo diferencial e integral.
Tercera edición.
Frank Ayres, Jr.
Schaum.
Las siguientes direcciones en la Internet.

<http://www.anirudh.net/courses/emch520/html>

<http://www.anirudh.net/courses/emch520/html/node4.html>

<http://www.acm.caltech.edu/>

<http://www.physik.uni-augsburg.de/~wobsta/tippetop/index.shtml.en>

http://www.media.mit.edu/~egon/projects/fabClass/random/tippeTop/tippeTop_Explanation/tippeTop.html

